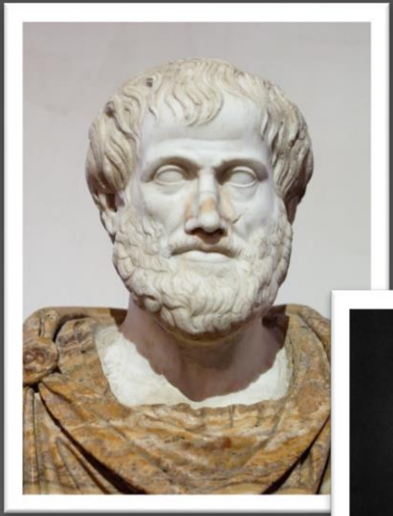
Minicurso de Lógica Matemática

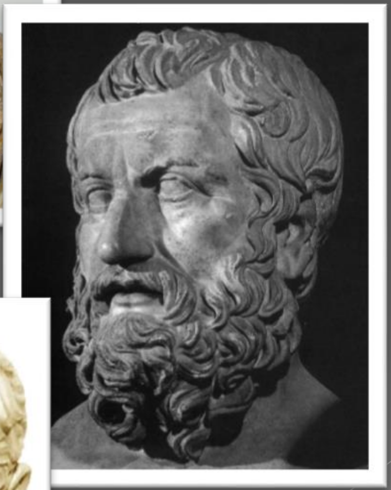
Uma introdução à Lógica Matemática e uma aplicação do método da Dedução Natural a sistemas axiomáticos formais

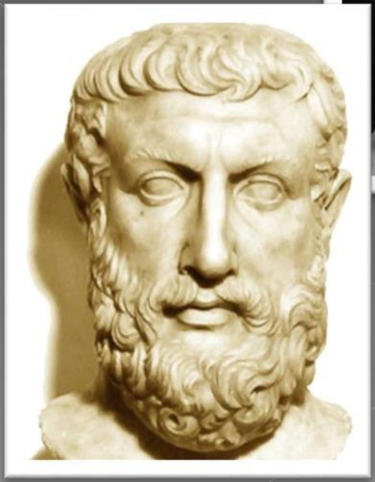
Fernando Vieira Costa Júnior
Elthon Allex da Silva Oliveira (Orientador)

Introdução - Parte I: A lógica

- O que é a lógica
  - "LÓGICA é a ciência que estuda princípios e métodos de inferência, tendo o objetivo principal de determinar em que condições certas *coisas* se seguem (são consequências), ou não, de outras" (MORTARI, 2001, grifo nosso)
- Quando surgiu
  - Textos indianos antigos [...]. A lógica formal surgiu na Grécia Antiga (400 a.C.), inicialmente com Zenão, Parmênides e os "sofistas".
  - O título de "pai da lógica" é de Aristóteles



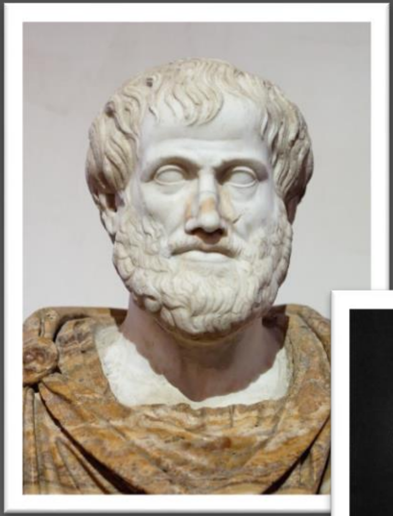


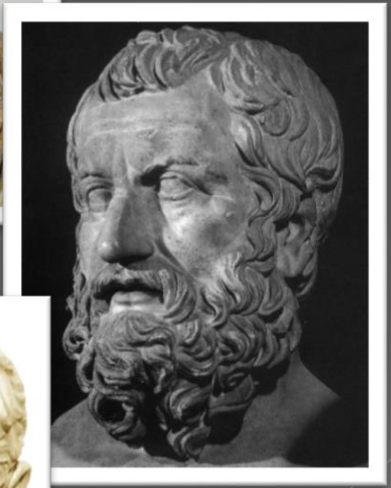


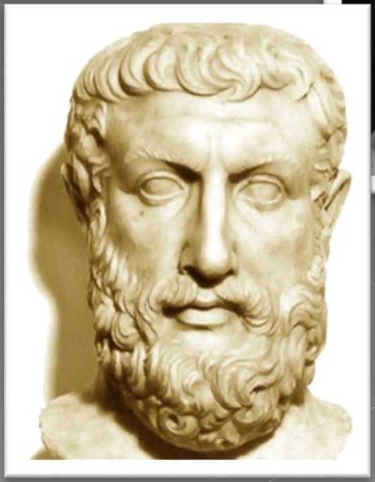
Fonte: Internet

Introdução - Parte I: A lógica

- O que é a lógica
  - "LÓGICA é a ciência que estuda princípios e métodos de inferência, tendo o objetivo principal de determinar em que condições certas *coisas* se seguem (são consequências), ou não, de outras" (MORTARI, 2001, grifo nosso)
- Quando surgiu
  - Textos indianos antigos [...]. A lógica formal surgiu na Grécia Antiga (400 a.C.), inicialmente com Zenão, Parmênides e os "sofistas".
  - O título de "pai da lógica" é de Aristóteles

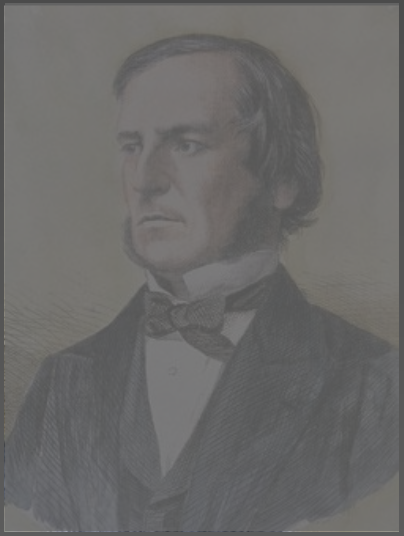






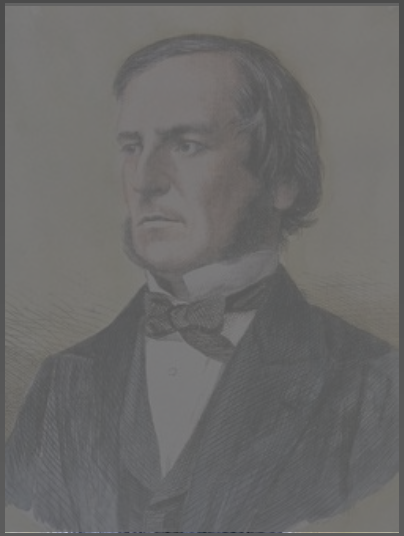
Fonte: Internet

Introdução - Parte II: A lógica formal



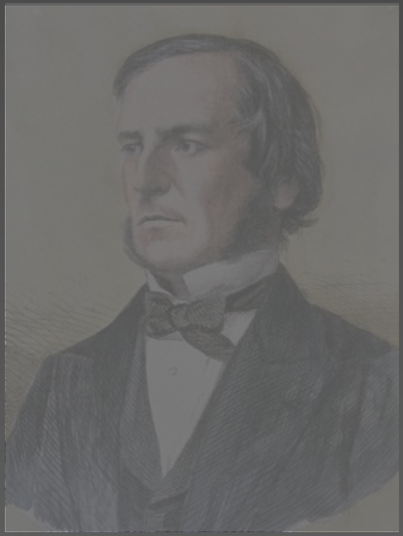
- O que é a lógica formal
  - Lógica formal vs. Lógica informal
- Argumento
  - Encadeamento lógico
  - Processo: premissa(s) > inferência > conclusão.
- Dedução e Indução
  - Argumento dedutivo
  - Argumento indutivo
- A lógica clássica e o surgimento da lógica simbólica
  - Boole (1815-64)
  - Tripé da lógica clássica (princípios): identidade, não-contradição e terceiro excluído.

Introdução - Parte II: A lógica formal



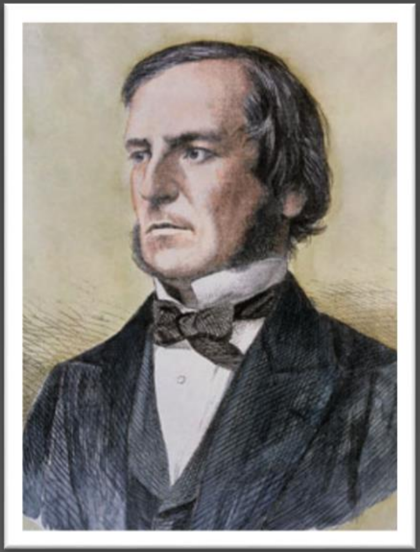
- O que é a lógica formal
  - Lógica formal vs. Lógica informal
- Argumento
  - Encadeamento lógico
  - Processo: premissa(s) > inferência > conclusão.
- Dedução e Indução
  - Argumento dedutivo
  - Argumento indutivo
- A lógica clássica e o surgimento da lógica simbólica
  - Boole (1815-64)
  - Tripé da lógica clássica (princípios): identidade, não-contradição e terceiro excluído.

Introdução - Parte II: A lógica formal



- O que é a lógica formal
  - Lógica formal vs. Lógica informal
- Argumento
  - Encadeamento lógico
  - Processo: premissa(s) > inferência > conclusão.
- Dedução e Indução
  - Argumento dedutivo
  - Argumento indutivo
- A lógica clássica e o surgimento da lógica simbólica
  - Boole (1815-64)
  - Tripé da lógica clássica (princípios): identidade, não-contradição e terceiro excluído.

Introdução - Parte II: A lógica formal



- O que é a lógica formal
  - Lógica formal vs. Lógica informal
- Argumento
  - Encadeamento lógico
  - Processo: premissa(s) > inferência > conclusão.
- Dedução e Indução
  - Argumento dedutivo
  - Argumento indutivo
- A lógica clássica e o surgimento da lógica simbólica
  - Boole (1815-64)
  - Tripé da lógica clássica (princípios): identidade, não-contradição e terceiro excluído.

Introdução ao CPC

(Cálculo Proposicional Clássico)

Conceitos iniciais (C.I.) 1 – Sintaxe e semântica

- **Sintaxe:** reflete sobre, questiona e estabelece a estrutura (constructo) da linguagem em questão.
- **Semântica:** reflete sobre, questiona e busca o significado (sentido) dos elementos da linguagem em questão.
- Ex:
  - Sintaxe da língua portuguesa [em aula]
  - Semântica da língua portuguesa [em aula]

Conceitos iniciais (C.I.) 1 – Sintaxe e semântica

- **Sintaxe:** reflete sobre, questiona e estabelece a estrutura (constructo) da linguagem em questão.
- **Semântica:** reflete sobre, questiona e busca o significado (sentido) dos elementos da linguagem em questão.
- Ex:
  - Sintaxe da língua portuguesa [em aula]
  - Semântica da língua portuguesa [em aula]

Conceitos iniciais (C.I.) 1 – Sintaxe e semântica

- **Sintaxe:** reflete sobre, questiona e estabelece a estrutura (constructo) da linguagem em questão.
- **Semântica:** reflete sobre, questiona e busca o significado (sentido) dos elementos da linguagem em questão.
- Ex:
  - Sintaxe da língua portuguesa [em aula]
  - Semântica da língua portuguesa [em aula]

C.I. 2 – Verdade e forma

- **Verdade:** conceito semântico que designa um estado de coisas existente.
  - A semântica de uma linguagem se ocupa com significado e verdade
- **Forma:** Estruturação da expressão de uma linguagem (formalismo).
  - A sintaxe de uma linguagem se ocupa da forma como as expressões desta linguagem se apresentam do ponto de vista estrutural.
- **Verdadeiro:** que corresponde à realidade.
- **Falso:** não verdadeiro.

C.I. 2 – Verdade e forma

- **Verdade:** conceito semântico que designa um estado de coisas existente.
  - A semântica de uma linguagem se ocupa com significado e verdade
- **Forma:** Estruturação da expressão de uma linguagem (formalismo).
  - A sintaxe de uma linguagem se ocupa da forma como as expressões desta linguagem se apresentam do ponto de vista estrutural.
- **Verdadeiro:** que corresponde à realidade.
- **Falso:** não verdadeiro.

C.I. 2 – Verdade e forma

- **Verdade:** conceito semântico que designa um estado de coisas existente.
  - A semântica de uma linguagem se ocupa com significado e verdade
- **Forma:** Estruturação da expressão de uma linguagem (formalismo).
  - A sintaxe de uma linguagem se ocupa da forma como as expressões desta linguagem se apresentam do ponto de vista estrutural.
- **Verdadeiro:** que corresponde à realidade.
- **Falso:** não verdadeiro.

C.I. 2 – Verdade e forma

- **Verdade:** conceito semântico que designa um estado de coisas existente.
  - A semântica de uma linguagem se ocupa com significado e verdade
- **Forma:** Estruturação da expressão de uma linguagem (formalismo).
  - A sintaxe de uma linguagem se ocupa da forma como as expressões desta linguagem se apresentam do ponto de vista estrutural.
- **Verdadeiro:** que corresponde à realidade.
- **Falso:** não verdadeiro.

C.I. 3: Termos, sentenças, proposições, etc.

- **Nome** (intuitivamente evidente): denotação do objeto.
- **Termo:** expressão que denota um nome ou um objeto.
- **Sentença:** sequência de palavras sintaticamente corretas (de acordo com a sintaxe da linguagem) e munida de uma semântica.
  - Sentença declarativa (foco do minicurso)
  - Sentença imperativa
  - Sentença interrogativa

C.I. 3: Termos, sentenças, proposições, etc.

- **Nome** (intuitivamente evidente): denotação do objeto.
- **Termo:** expressão que denota um nome ou um objeto.
- **Sentença:** sequência de palavras sintaticamente corretas (de acordo com a sintaxe da linguagem) e munida de uma semântica.
  - Sentença declarativa (foco do minicurso)
  - Sentença imperativa
  - Sentença interrogativa

C.I. 3: Termos, sentenças, proposições, etc.

- **Nome** (intuitivamente evidente): denotação do objeto.
- **Termo:** expressão que denota um nome ou um objeto.
- **Sentença:** sequência de palavras sintaticamente corretas (de acordo com a sintaxe da linguagem) e munida de uma semântica.
  - Sentença declarativa (foco do minicurso)
  - Sentença imperativa
  - Sentença interrogativa

Continua...

- Proposição (contrassenso filosófico): para nós, será o sentido que uma sentença expressa, podendo ser julgada verdadeira ou falsa.

O Cálculo Proposicional Clássico (CPC)

- É uma linguagem artificial
  - Formaliza o raciocínio
  - Semântica materialmente adequada
  - Sintaxe formalmente correta
  - Possibilita a dedução
  - Elimina ambiguidades

O Cálculo Proposicional Clássico (CPC)

- É uma linguagem artificial
  - Formaliza o raciocínio
  - Semântica materialmente adequada
  - Sintaxe formalmente correta
  - Possibilita a dedução
  - Elimina ambiguidades

O Cálculo Proposicional Clássico (CPC)

- É uma linguagem artificial
  - Formaliza o raciocínio
  - Semântica materialmente adequada
  - Sintaxe formalmente correta
  - Possibilita a dedução
  - Elimina ambiguidades

O Cálculo Proposicional Clássico (CPC)

- É uma linguagem artificial
  - Formaliza o raciocínio
  - Semântica materialmente adequada
  - Sintaxe formalmente correta
  - Possibilita a dedução
  - Elimina ambiguidades

O Cálculo Proposicional Clássico (CPC)

- É uma linguagem artificial
  - Formaliza o raciocínio
  - Semântica materialmente adequada
  - Sintaxe formalmente correta
  - Possibilita a dedução
  - Elimina ambiguidades

O Cálculo Proposicional Clássico (CPC)

- É uma linguagem artificial
  - Formaliza o raciocínio
  - Semântica materialmente adequada
  - Sintaxe formalmente correta
  - Possibilita a dedução
  - Elimina ambiguidades

C.I. 4 – Constantes proposicionais

- No CPC, às proposições, daremos letras maiúsculas A, B, C, ... X, Y, Z. É permitido indexar este conjunto pelos números naturais.
- As letras A, B, C,..., V serão dadas a constantes proposicionais cuja denotação é conhecida.
- As letras W, X, Y e Z serão reservadas para proposições quaisquer.
- Exemplos:
  - K: Pedro é skatista
  - M: Marcelo morreu
  - C: chove

C.I. 4 – Constantes proposicionais

- No CPC, às proposições, daremos letras maiúsculas A, B, C, ... X, Y, Z. É permitido indexar este conjunto pelos números naturais.
- As letras A, B, C,..., V serão dadas a constantes proposicionais cuja denotação é conhecida.
- As letras W, X, Y e Z serão reservadas para proposições quaisquer.
- Exemplos:
  - K: Pedro é skatista
  - M: Marcelo morreu
  - C: chove

C.I. 4 – Constantes proposicionais

- No CPC, às proposições, daremos letras maiúsculas A, B, C, ... X, Y, Z. É permitido indexar este conjunto pelos números naturais.
- As letras A, B, C,..., V serão dadas a constantes proposicionais cuja denotação é conhecida.
- As letras W, X, Y e Z serão reservadas para proposições quaisquer.
- Exemplos:
  - K: Pedro é skatista
  - M: Marcelo morreu
  - C: chove

C.I. 4 – Constantes proposicionais

- No CPC, às proposições, daremos letras maiúsculas A, B, C, ... X, Y, Z. É permitido indexar este conjunto pelos números naturais.
- As letras A, B, C,..., V serão dadas a constantes proposicionais cuja denotação é conhecida.
- As letras W, X, Y e Z serão reservadas para proposições quaisquer.
- Exemplos:
  - K: Pedro é skatista
  - M: Marcelo morreu
  - C: chove

Operadores Lógicos (O.L.) 1: Negação

- Usa-se operadores para construir frases.
- Afirmação de não-ocorrência de proposições
  - Negação de sentenças em português. [em aula]
- Símbolo lógico: "¬"
- Sintaxe: ¬X
  - Sintaticamente: "não-X", "X não ocorre" ou "X não é o caso"
  - Semanticamente "não é verdade que X"
- Exemplos:
  - ¬K: Paulo não é skatista
  - ¬M: Marcelo não morreu (Marcelo está vivo? Marcelo foi morto? [ambiguidades do português])
  - ¬C: não chove
  - ¬¬¬C: não é verdade que não é o caso que não chove

Operadores Lógicos (O.L.) 1: Negação

- Usa-se operadores para construir frases.
- Afirmação de não-ocorrência de proposições
  - Negação de sentenças em português. [em aula]
- Símbolo lógico: "¬"
- Sintaxe: ¬X
  - Sintaticamente: "não-X", "X não ocorre" ou "X não é o caso"
  - Semanticamente "não é verdade que X"
- Exemplos:
  - ¬K: Paulo não é skatista
  - ¬M: Marcelo não morreu (Marcelo está vivo? Marcelo foi morto? [ambiguidades do português])
  - ¬C: não chove
  - ¬¬¬C: não é verdade que não é o caso que não chove

Operadores Lógicos (O.L.) 1: Negação

- Usa-se operadores para construir frases.
- Afirmação de não-ocorrência de proposições
  - Negação de sentenças em português. [em aula]
- Símbolo lógico: "¬"
- Sintaxe: ¬X
  - Sintaticamente: "não-X", "X não ocorre" ou "X não é o caso"
  - Semanticamente "não é verdade que X"
- Exemplos:
  - ¬K: Paulo não é skatista
  - ¬M: Marcelo não morreu (Marcelo está vivo? Marcelo foi morto? [ambiguidades do português])
  - ¬C: não chove
  - ¬¬¬C: não é verdade que não é o caso que não chove

Operadores Lógicos (O.L.) 1: Negação

- Usa-se operadores para construir frases.
- Afirmação de não-ocorrência de proposições
  - Negação de sentenças em português. [em aula]
- Símbolo lógico: “¬”
- Sintaxe: ¬X
  - Sintaticamente: “não-X”, “X não ocorre” ou “X não é o caso”
  - Semanticamente “não é verdade que X”
- Exemplos:
  - ¬K: Paulo não é skatista
  - ¬M: Marcelo não morreu (Marcelo está vivo? Marcelo foi morto? [ambiguidades do português])
  - ¬C: não chove
  - ¬¬¬C: não é verdade que não é o caso que não chove

Operadores Lógicos (O.L.) 1: Negação

- Usa-se operadores para construir frases.
- Afirmação de não-ocorrência de proposições
  - Negação de sentenças em português. [em aula]
- Símbolo lógico: "¬"
- Sintaxe: ¬X
  - Sintaticamente: "não-X", "X não ocorre" ou "X não é o caso"
  - Semanticamente "não é verdade que X"
- Exemplos:
  - ¬K: Paulo não é skatista
  - ¬M: Marcelo não morreu (Marcelo está vivo? Marcelo foi morto? [ambiguidades do português])
  - ¬C: não chove
  - ¬¬¬C: não é verdade que não é o caso que não chove

O.L. 2: Conjunção

- Relação de ocorrência conjunta entre duas proposições
  - Conjunção de sentenças no português.
- Símbolo lógico: “∧”
- Sintaxe: X ∧ Y
  - Sintaticamente: “X e Y”, “acontece que X e Y” ou “É o caso que X e Y”.
  - Semanticamente: “é verdade que X e Y” ou “X e Y são verdades”
- Exemplos:
  - C ∧ C: chove e chove
  - (¬M) ∧ (¬K): nem Marcelo morreu, nem Paulo é skatista
  - ¬(C ∧ (¬C)): não é verdade que chove e não chove
  - K ∧ M: Paulo é skatista e Marcelo (infelizmente) morreu

O.L. 2: Conjunção

- Relação de ocorrência conjunta entre duas proposições
  - Conjunção de sentenças no português.
- Símbolo lógico: “$\wedge$”
- Sintaxe: $X \wedge Y$
  - Sintaticamente: “X e Y”, “acontece que X e Y” ou “É o caso que X e Y”.
  - Semanticamente: “é verdade que X e Y” ou “X e Y são verdades”
- Exemplos:
  - $C \wedge C$: chove e chove
  - $(\neg M) \wedge (\neg K)$: nem Marcelo morreu, nem Paulo é skatista
  - $\neg(C \wedge (\neg C))$: não é verdade que chove e não chove
  - $K \wedge M$: Paulo é skatista e Marcelo (infelizmente) morreu

O.L. 2: Conjunção

- Relação de ocorrência conjunta entre duas proposições
  - Conjunção de sentenças no português.
- Símbolo lógico: “∧”
- Sintaxe: $X \wedge Y$
  - Sintaticamente: “X e Y”, “acontece que X e Y” ou “É o caso que X e Y”.
  - Semanticamente: “é verdade que X e Y” ou “X e Y são verdades”
- Exemplos:
  - $C \wedge C$: chove e chove
  - $(\neg M) \wedge (\neg K)$: nem Marcelo morreu, nem Paulo é skatista
  - $\neg(C \wedge (\neg C))$: não é verdade que chove e não chove
  - $K \wedge M$: Paulo é skatista e Marcelo (infelizmente) morreu

O.L. 2: Conjunção

- Relação de ocorrência conjunta entre duas proposições
  - Conjunção de sentenças no português.
- Símbolo lógico: “∧”
- Sintaxe: X ∧ Y
  - Sintaticamente: “X e Y”, “acontece que X e Y” ou “É o caso que X e Y”.
  - Semanticamente: “é verdade que X e Y” ou “X e Y são verdades”
- Exemplos:
  - $C \wedge C$: chove e chove
  - $(\neg M) \wedge (\neg K)$: nem Marcelo morreu, nem Paulo é skatista
  - $\neg(C \wedge (\neg C))$: não é verdade que chove e não chove
  - $K \wedge M$: Paulo é skatista e Marcelo (infelizmente) morreu

O.L. 3: Disjunção

- Relação de ocorrência disjunta entre duas proposições
  - Disjunção de sentenças no português. [em aula]
- Símbolo lógico: "v"
- Sintaxe: X v Y
  - Sintaticamente: "X ou Y", "acontece que X ou Y" ou "ou é o caso que X ou é o caso que Y".
  - Semanticamente: "é verdade que X ou Y" ou "ou X, ou Y é verdade"
- Exemplos:
  - C v C: chove ou chove
  - (¬M) v (¬K): ou Marcelo não morreu, ou Paulo não é skatista
  - C v (¬C): chove ou não chove
  - K v C: Paulo é skatista ou chove

O.L. 3: Disjunção

- Relação de ocorrência disjunta entre duas proposições
  - Disjunção de sentenças no português. [em aula]
- Símbolo lógico: "v"
- Sintaxe: X v Y
  - Sintaticamente: "X ou Y", "acontece que X ou Y" ou "ou é o caso que X ou é o caso que Y".
  - Semanticamente: "é verdade que X ou Y" ou "ou X, ou Y é verdade"
- Exemplos:
  - C v C: chove ou chove
  - (¬M) v (¬K): ou Marcelo não morreu, ou Paulo não é skatista
  - C v (¬C): chove ou não chove
  - K v C: Paulo é skatista ou chove

O.L. 3: Disjunção

- Relação de ocorrência disjunta entre duas proposições
  - Disjunção de sentenças no português. [em aula]
- Símbolo lógico: "v"
- Sintaxe: X v Y
  - Sintaticamente: "X ou Y", "acontece que X ou Y" ou "ou é o caso que X ou é o caso que Y".
  - Semanticamente: "é verdade que X ou Y" ou "ou X, ou Y é verdade"
- Exemplos:
  - C v C: chove ou chove
  - (¬M) v (¬K): ou Marcelo não morreu, ou Paulo não é skatista
  - C v (¬C): chove ou não chove
  - K v C: Paulo é skatista ou chove

O.L. 3: Disjunção

- Relação de ocorrência disjunta entre duas proposições
  - Disjunção de sentenças no português. [em aula]
- Símbolo lógico: "v"
- Sintaxe: X v Y
  - Sintaticamente: "X ou Y", "acontece que X ou Y" ou "ou é o caso que X ou é o caso que Y".
  - Semanticamente: "é verdade que X ou Y" ou "ou X, ou Y é verdade"
- Exemplos:
  - C v C: chove ou chove
  - (¬M) v (¬K): ou Marcelo não morreu, ou Paulo não é skatista
  - C v (¬C): chove ou não chove
  - K v C: Paulo é skatista ou chove

O.L. 4: Condicional

- Relação de condição necessária *ou* suficiente entre duas proposições.
  - Condição entre proposições do português. [em aula]
- Símbolo lógico: "→"
- Sintaxe: X → Y
  - Sintaticamente: "se X então Y", "X acarreta Y" ou "X somente se Y"
  - Semanticamente: "X é condição suficiente para Y", "Y é condição necessária para X", ou "X é falso ou Y verdadeiro".
- Exemplos:
  - C → M: Se chove então Marcelo morre (Marcelo é de açúcar)
  - (¬M) → (¬C): Se Marcelo não morre então não chove
  - (¬C) → (¬C): Se não chove então não chove
  - C → M: chover é condição suficiente para Marcelo morrer
  - C → M: Marcelo morrer é condição necessária para chover

O.L. 4: Condicional

- Relação de condição necessária *ou* suficiente entre duas proposições.
  - Condição entre proposições do português. [em aula]
- Símbolo lógico: "→"
- Sintaxe: X → Y
  - Sintaticamente: "se X então Y", "X acarreta Y" ou "X somente se Y"
  - Semanticamente: "X é condição suficiente para Y", "Y é condição necessária para X", ou "X é falso ou Y verdadeiro".
- Exemplos:
  - C → M: Se chove então Marcelo morre (Marcelo é de açúcar)
  - (¬M) → (¬C): Se Marcelo não morre então não chove
  - (¬C) → (¬C): Se não chove então não chove
  - C → M: chover é condição suficiente para Marcelo morrer
  - C → M: Marcelo morrer é condição necessária para chover

O.L. 4: Condicional

- Relação de condição necessária *ou* suficiente entre duas proposições.
  - Condição entre proposições do português. [em aula]
- Símbolo lógico: "→"
- Sintaxe: $X \rightarrow Y$
  - Sintaticamente: "se X então Y", "X acarreta Y" ou "X somente se Y"
  - Semanticamente: "X é condição suficiente para Y", "Y é condição necessária para X", ou "X é falso ou Y verdadeiro".
- Exemplos:
  - $C \rightarrow M$: Se chove então Marcelo morre (Marcelo é de açúcar)
  - $(\neg M) \rightarrow (\neg C)$: Se Marcelo não morre então não chove
  - $(\neg C) \rightarrow (\neg C)$: Se não chove então não chove
  - $C \rightarrow M$: chover é condição suficiente para Marcelo morrer
  - $C \rightarrow M$: Marcelo morrer é condição necessária para chover

O.L. 4: Condicional

- Relação de condição necessária *ou* suficiente entre duas proposições.
  - Condição entre proposições do português. [em aula]
- Símbolo lógico: "→"
- Sintaxe: $X \rightarrow Y$
  - Sintaticamente: "se X então Y", "X acarreta Y" ou "X somente se Y"
  - Semanticamente: "X é condição suficiente para Y", "Y é condição necessária para X", ou "X é falso ou Y verdadeiro".
- Exemplos:
  - $C \rightarrow M$: Se chove então Marcelo morre (Marcelo é de açúcar)
  - $(\neg M) \rightarrow (\neg C)$: Se Marcelo não morre então não chove
  - $(\neg C) \rightarrow (\neg C)$: Se não chove então não chove
  - $C \rightarrow M$: chover é condição suficiente para Marcelo morrer
  - $C \rightarrow M$: Marcelo morrer é condição necessária para chover

O.L. 5: Bi-condicional

- Relação de condição necessária e suficiente entre duas proposições.
  - Bi-condição entre proposições do português. [em aula]
- Símbolo lógico: "↔"
- Sintaxe: X ↔ Y
  - Sintaticamente: "X se, e somente se Y", "X acarreta e é acarretado por Y"
  - Semanticamente: "X é condição necessária e suficiente para Y"
- Exemplos:
  - C ↔ M: chove se, e somente se, Marcelo morre (Marcelo é o marcador de chuva dos índios)
  - (¬M) ↔ (¬C): Marcelo não morre se, e somente se, não chove
  - (¬C) ↔ (¬C): não chove se, e somente se, não chove
  - C ↔ M: "chover é condição necessária e suficiente para Marcelo morrer"

O.L. 5: Bi-condicional

- Relação de condição necessária e suficiente entre duas proposições.
  - Bi-condição entre proposições do português. [em aula]
- Símbolo lógico: "↔"
- Sintaxe: X ↔ Y
  - Sintaticamente: "X se, e somente se Y", "X acarreta e é acarretado por Y"
  - Semanticamente: "X é condição necessária e suficiente para Y"
- Exemplos:
  - C ↔ M: chove se, e somente se, Marcelo morre (Marcelo é o marcador de chuva dos índios)
  - (¬M) ↔ (¬C): Marcelo não morre se, e somente se, não chove
  - (¬C) ↔ (¬C): não chove se, e somente se, não chove
  - C ↔ M: "chover é condição necessária e suficiente para Marcelo morrer"

O.L. 5: Bi-condicional

- Relação de condição necessária e suficiente entre duas proposições.
  - Bi-condição entre proposições do português. [em aula]
- Símbolo lógico: "↔"
- Sintaxe: $X \leftrightarrow Y$
  - Sintaticamente: "X se, e somente se Y", "X acarreta e é acarretado por Y"
  - Semanticamente: "X é condição necessária e suficiente para Y"
- Exemplos:
  - $C \leftrightarrow M$: chove se, e somente se, Marcelo morre (Marcelo é o marcador de chuva dos índios)
  - $(\neg M) \leftrightarrow (\neg C)$: Marcelo não morre se, e somente se, não chove
  - $(\neg C) \leftrightarrow (\neg C)$: não chove se, e somente se, não chove
  - $C \leftrightarrow M$: "chover é condição necessária e suficiente para Marcelo morrer"

O.L. 5: Bi-condicional

- Relação de condição necessária e suficiente entre duas proposições.
  - Bi-condição entre proposições do português. [em aula]
- Símbolo lógico: "$\leftrightarrow$"
- Sintaxe: $X \leftrightarrow Y$
  - Sintaticamente: "X se, e somente se Y", "X acarreta e é acarretado por Y"
  - Semanticamente: "X é condição necessária e suficiente para Y"
- Exemplos:
  - $C \leftrightarrow M$: chove se, e somente se, Marcelo morre (Marcelo é o marcador de chuva dos índios)
  - $(\neg M) \leftrightarrow (\neg C)$: Marcelo não morre se, e somente se, não chove
  - $(\neg C) \leftrightarrow (\neg C)$: não chove se, e somente se, não chove
  - $C \leftrightarrow M$: "chover é condição necessária e suficiente para Marcelo morrer"

C.I. 5 - Fórmula

- *Fórmulas* são proposições como C, $\neg M$ ou $C \leftrightarrow M$
- Fórmulas como C, K ou M são chamadas de *fórmulas atômicas*
- Fórmulas como $\neg C$, $C \leftrightarrow M$, ou $K \wedge M$ são chamadas de *fórmulas moleculares*.
- Na fórmula $\neg C$, C é sua sub-fórmula imediata. Já as sub-fórmulas imediatas da fórmula $(\neg C) \leftrightarrow M$ são $\neg C$ e M.
- Fórmulas atômicas não possuem sub-fórmulas imediatas.

C.I. 5 - Fórmula

- *Fórmulas* são proposições como C, ¬M ou C ↔ M
- Fórmulas como C, K ou M são chamadas de *fórmulas atômicas*
- Fórmulas como ¬C, C ↔ M, ou K ∧ M são chamadas de *fórmulas moleculares*.
- Na fórmula ¬C, C é sua sub-fórmula imediata. Já as sub-fórmulas imediatas da fórmula (¬C) ↔ M são ¬C e M.
- Fórmulas atômicas não possuem sub-fórmulas imediatas.

C.I. 5 - Fórmula

- *Fórmulas* são proposições como C, ¬M ou C ↔ M
- Fórmulas como C, K ou M são chamadas de *fórmulas atômicas*
- Fórmulas como ¬C, C ↔ M, ou K ∧ M são chamadas de *fórmulas moleculares*.
- Na fórmula ¬C, C é sua sub-fórmula imediata. Já as sub-fórmulas imediatas da fórmula (¬C) ↔ M são ¬C e M.
- Fórmulas atômicas não possuem sub-fórmulas imediatas.

C.I. 5 - Fórmula

- *Fórmulas* são proposições como C, ¬M ou C ↔ M
- Fórmulas como C, K ou M são chamadas de *fórmulas atômicas*
- Fórmulas como ¬C, C ↔ M, ou K ∧ M são chamadas de *fórmulas moleculares*.
- Na fórmula ¬C, C é sua sub-fórmula imediata. Já as sub-fórmulas imediatas da fórmula (¬C) ↔ M são ¬C e M.
- Fórmulas atômicas não possuem sub-fórmulas imediatas.

C.I. 5 - Fórmula

- *Fórmulas* são proposições como C, ¬M ou C ↔ M
- Fórmulas como C, K ou M são chamadas de *fórmulas atômicas*
- Fórmulas como ¬C, C ↔ M, ou K ∧ M são chamadas de *fórmulas moleculares*.
- Na fórmula ¬C, C é sua sub-fórmula imediata. Já as sub-fórmulas imediatas da fórmula (¬C) ↔ M são ¬C e M.
- Fórmulas atômicas não possuem sub-fórmulas imediatas.

C.I. 6 – Hierarquia de conectivos

- Precedência de leitura e cálculo dos conectivos:
  - ¬ - A negação precede todos
  - ∧ e ∨ - Separaremos conjunções e disjunções com parênteses
  - → e ↔ - Separaremos os conectivos de condição com parêntese
- Exemplo:
  - (¬C) ↔ M é o mesmo que ¬C ↔ M
  - (¬M) ↔ (¬C) é o mesmo que ¬M ↔ ¬C
  - C v (¬C) é o mesmo que C v ¬C
  - (¬M) v (¬K) é o mesmo que ¬M v ¬K
  - (C v K) ∧ M e (M → K) ↔ C permanecem iguais

C.I. 6 – Hierarquia de conectivos

- Precedência de leitura e cálculo dos conectivos:
  - ¬ - A negação precede todos
  - ∧ e ∨ - Separaremos conjunções e disjunções com parênteses
  - → e ↔ - Separaremos os conectivos de condição com parêntese
- Exemplo:
  - (¬C) ↔ M é o mesmo que ¬C ↔ M
  - (¬M) ↔ (¬C) é o mesmo que ¬M ↔ ¬C
  - C ∨ (¬C) é o mesmo que C ∨ ¬C
  - (¬M) ∨ (¬K) é o mesmo que ¬M ∨ ¬K
  - (C ∨ K) ∧ M e (M → K) ↔ C permanecem iguais

O.L. 6 – Equivalência e Implicação Lógicas

- Quando, no CPC, dizemos "... é o mesmo que ...", queremos dizer de duas proposições que são logicamente equivalentes. O símbolo para tal ação é "$\Leftrightarrow$".
- Quando dizemos que "... implica logicamente ...", queremos dizer que uma proposição é suficiente para fazer se seguir outra. O símbolo para isso é "$\Rightarrow$".
- A semântica e a sintaxe de "$\Leftrightarrow$" e de "$\Rightarrow$" é, respectivamente, igual à de "$\leftrightarrow$" e de "$\rightarrow$" . No minicurso, bem como em matemática, no geral, utiliza-se a equivalência e a implicação com uma motivação diferente.
- Uma das principais utilizações para a equivalência será em definições formais.

Exemplos em sala.

O.L. 6 – Equivalência e Implicação Lógicas

- Quando, no CPC, dizemos "... é o mesmo que ...", queremos dizer de duas proposições que são logicamente equivalentes. O símbolo para tal ação é "⇔".
- Quando dizemos que "... implica logicamente ...", queremos dizer que uma proposição é suficiente para fazer se seguir outra. O símbolo para isso é "⇒".
- A semântica e a sintaxe de "⇔" e de "⇒" é, respectivamente, igual à de "↔" e de "→" . No minicurso, bem como em matemática, no geral, utiliza-se a equivalência e a implicação com uma motivação diferente.
- Uma das principais utilizações para a equivalência será em definições formais.

Exemplos em sala.

O.L. 6 – Equivalência e Implicação Lógicas

- Quando, no CPC, dizemos "... é o mesmo que ...", queremos dizer de duas proposições que são logicamente equivalentes. O símbolo para tal ação é "$\Leftrightarrow$".
- Quando dizemos que "... implica logicamente ...", queremos dizer que uma proposição é suficiente para fazer se seguir outra. O símbolo para isso é "$\Rightarrow$".
- A semântica e a sintaxe de "$\Leftrightarrow$" e de "$\Rightarrow$" é, respectivamente, igual à de "$\leftrightarrow$" e de "$\rightarrow$" . No minicurso, bem como em matemática, no geral, utiliza-se a equivalência e a implicação com uma motivação diferente.
- Uma das principais utilizações para a equivalência será em definições formais.

Exemplos em sala.

O.L. 6 – Equivalência e Implicação Lógicas

- Quando, no CPC, dizemos "... é o mesmo que ...", queremos dizer de duas proposições que são logicamente equivalentes. O símbolo para tal ação é "⇔".
- Quando dizemos que "... implica logicamente ...", queremos dizer que uma proposição é suficiente para fazer se seguir outra. O símbolo para isso é "⇒".
- A semântica e a sintaxe de "⇔" e de "⇒" é, respectivamente, igual à de "↔" e de "→" . No minicurso, bem como em matemática, no geral, utiliza-se a equivalência e a implicação com uma motivação diferente.
- Uma das principais utilizações para a equivalência será em definições formais.

Exemplos
em sala.

O.L. 7: Definição do condicional e do bi-condicional

- Define-se o condicional da seguinte forma:
  - $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg X \vee Y$
- Define-se o bi-condicional da seguinte forma:
  - $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$
- Em $X \rightarrow Y$, X é chamado de *antecedente*, e Y de *consequente*.
- Em $X \leftrightarrow Y$, X e Y são, ambos, antecedente e consequente.

O.L. 7: Definição do condicional e do bi-condicional

- Define-se o condicional da seguinte forma:
  - $(X \to Y) \Leftrightarrow \neg X \vee Y$
- Define-se o bi-condicional da seguinte forma:
  - $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \to Y) \wedge (Y \to X)$
- Em $X \to Y$, X é chamado de *antecedente*, e Y de *consequente*.
- Em $X \leftrightarrow Y$, X e Y são, ambos, antecedente e consequente.

O.L. 7: Definição do condicional e do bi-condicional

- Definimos o condicional da seguinte forma:
  - $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg X \vee Y$
- Definimos o bi-condicional da seguinte forma:
  - $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$
- Em $X \rightarrow Y$, X é chamado de *antecedente*, e Y de *consequente*.
- Em $X \leftrightarrow Y$, X e Y são, ambos, antecedente e consequente.

O.L. 7: Definição do condicional e do bi-condicional

- Definimos o condicional da seguinte forma:
  - $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg X \vee Y$
- Definimos o bi-condicional da seguinte forma:
  - $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$
- Em $X \rightarrow Y$, X é chamado de *antecedente*, e Y de *consequente*.
- Em $X \leftrightarrow Y$, X e Y são, ambos, antecedente e consequente.

C.I. 7 – Fórmulas são bem formadas

- **Definição:**
  - X é uma fórmula bem formada (f.b.f.)
  - Se α é f.b.f., então $\neg\alpha$ é f.b.f.
  - Se α e β são f.b.f., então:
    - $\alpha \wedge \beta$ é f.b.f.
    - $\alpha \vee \beta$ é f.b.f.
    - $\alpha \rightarrow \beta$ é f.b.f.
    - $\alpha \leftrightarrow \beta$ é f.b.f.

C.I. 7 – Fórmulas são bem formadas

- **Definição:**
  - X é uma fórmula bem formada (f.b.f.)
  - Se α é f.b.f., então $\neg\alpha$ é f.b.f.
  - Se α e β são f.b.f., então:
    - $\alpha \wedge \beta$ é f.b.f.
    - $\alpha \vee \beta$ é f.b.f.
    - $\alpha \rightarrow \beta$ é f.b.f.
    - $\alpha \leftrightarrow \beta$ é f.b.f.

C.I. 7 – Fórmulas são bem formadas

- **Definição:**
  - X é uma fórmula bem formada (f.b.f.)
  - Se α é f.b.f., então $\neg\alpha$ é f.b.f.
  - Se α e β são f.b.f., então:
    - $\alpha \wedge \beta$ é f.b.f.
    - $\alpha \vee \beta$ é f.b.f.
    - $\alpha \rightarrow \beta$ é f.b.f.
    - $\alpha \leftrightarrow \beta$ é f.b.f.

Exercício

- Traduzir sentenças do português para a linguagem do CPC
- Analisar se fórmulas são bem formadas
- Destrinchar fórmulas moleculares em esquema de árvore.

Procedimentos de prova para o CPC

Tabelas Verdade (T.V.) 1: Noção Inicial

- Uma proposição pode ser verdadeira ou falsa
- **A verdade dos operadores:**
  - Dependem das sub-fórmulas imediatas

    ⋮
  - Dependem das fórmulas atômicas
- A verdade ou falsidade de uma fórmula molecular do CPC pode ser organizada numa tabela.

Tabelas Verdade (T.V.) 1: Noção Inicial

- Uma proposição pode ser verdadeira ou falsa
- **A verdade dos operadores:**
  - Dependem das sub-fórmulas imediatas

    ⋮
  - Dependem das fórmulas atômicas
- A verdade ou falsidade de uma fórmula molecular do CPC pode ser organizada numa tabela.

Tabelas Verdade (T.V.) 1: Noção Inicial

- Uma proposição pode ser verdadeira ou falsa
- **A verdade dos operadores:**
  - Dependem das sub-fórmulas imediatas

    ⋮

  - Dependem das fórmulas atômicas
- A verdade ou falsidade de uma fórmula molecular do CPC pode ser organizada numa tabela.

T.V. 2: Número de linhas

- Duas possibilidades (verdadeiro ou falso) para n constantes proposicionais fornece uma tabela com 2^n linhas

X
V
F

X	Y
V	**V**
V	**F**
F	**V**
F	**F**

X	Y	Z
V	**V**	**V**
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**
F	**F**	**F**

T.V. 3.1: Negação, conjunção e disjunção

- Se uma proposição é verdadeira, sua negação é falsa, vice-versa
- Uma conjunção é verdadeira se ambas as proposições relacionadas o forem
- Uma disjunção é verdadeira se, no mínimo, uma das proposições relacionadas o forem

Negação

X	$\neg X$
V	**F**
F	**V**

Conjunção

X	Y	$X \wedge Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Disjunção

X	Y	$X \vee Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

T.V. 3.1: Negação, conjunção e disjunção

- Se uma proposição é verdadeira, sua negação é falsa, vice-versa
- Uma conjunção é verdadeira se ambas as proposições relacionadas o forem
- Uma disjunção é verdadeira se, no mínimo, uma das proposições relacionadas o forem

Negação

X	$\neg X$
V	**F**
F	**V**

Conjunção

X	Y	$X \wedge Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Disjunção

X	Y	$X \vee Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

T.V. 3.1: Negação, conjunção e disjunção

- Se uma proposição é verdadeira, sua negação é falsa, vice-versa
- Uma conjunção é verdadeira se ambas as proposições relacionadas o forem
- Uma disjunção é verdadeira se, no mínimo, uma das proposições relacionadas o forem

Negação

X	$\neg X$
V	**F**
F	**V**

Conjunção

X	Y	$X \wedge Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Disjunção

X	Y	$X \vee Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

T.V. 3.1: Negação, conjunção e disjunção

- Se uma proposição é verdadeira, sua negação é falsa, vice-versa
- Uma conjunção é verdadeira se ambas as proposições relacionadas o forem
- Uma disjunção é verdadeira se, no mínimo, uma das proposições relacionadas o forem

Negação

X	$\neg X$
V	**F**
F	**V**

Conjunção

X	Y	$X \wedge Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Disjunção

X	Y	$X \vee Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

T.V. 3.2: condicional e bi-condicional

- O condicional somente é falso quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso.
- O bi-condicional é verdadeiro quando o antecedente e o consequente possuem o mesmo valor verdade.

Implicação

X	Y	$X \to Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bi-implicação

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exercícios em sala.

T.V. 3.2: condicional e bi-condicional

- O condicional somente é falso quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso.
- O bi-condicional é verdadeiro quando o antecedente e o consequente possuem o mesmo valor verdade.

Implicação

X	Y	$X \to Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Bi-implicação

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Exercícios em sala.

T.V. 3.2: condicional e bi-condicional

- O condicional somente é falso quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso.
- O bi-condicional é verdadeiro quando o antecedente e o consequente possuem o mesmo valor verdade.

Implicação

X	Y	$X \to Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Bi-implicação

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Exercícios em sala.

T.V. 4: Tautologia, contradição e contingência

- Cada linha da tabela é chamada de *valoração* da fórmula
- Existem três categorias de fórmulas:
  - Tautologias: a fórmula recebe o valor verdadeiro em todas as valorações possíveis
  - Contradição: a fórmula recebe o valor falso em todas as valorações possíveis
  - Contingência: a fórmula recebe valor verdadeiro em pelo menos uma valoração, e falso em pelo menos uma valoração

Exercícios em sala.

T.V. 4: Tautologia, contradição e contingência

- Cada linha da tabela é chamada de *valoração* da fórmula
- Existem três categorias de fórmulas:
  - Tautologias: a fórmula recebe o valor verdadeiro em todas as valorações possíveis
  - Contradição: a fórmula recebe o valor falso em todas as valorações possíveis
  - Contingência: a fórmula recebe valor verdadeiro em pelo menos uma valoração, e falso em pelo menos uma valoração

Exercícios em sala.

T.V. 4: Tautologia, contradição e contingência

- Cada linha da tabela é chamada de *valoração* da fórmula
- Existem três categorias de fórmulas:
  - **Tautologias:** a fórmula recebe o valor verdadeiro em todas as valorações possíveis
  - Contradição: a fórmula recebe o valor falso em todas as valorações possíveis
  - Contingência: a fórmula recebe valor verdadeiro em pelo menos uma valoração, e falso em pelo menos uma valoração

Exercícios em sala.

T.V. 4: Tautologia, contradição e contingência

- Cada linha da tabela é chamada de *valoração* da fórmula
- Existem três categorias de fórmulas:
  - Tautologias: a fórmula recebe o valor verdadeiro em todas as valorações possíveis
  - **Contradição:** a fórmula recebe o valor falso em todas as valorações possíveis
  - Contingência: a fórmula recebe valor verdadeiro em pelo menos uma valoração, e falso em pelo menos uma valoração

Exercícios em sala.

T.V. 4: Tautologia, contradição e contingência

- Cada linha da tabela é chamada de *valoração* da fórmula
- Existem três categorias de fórmulas:
  - Tautologias: a fórmula recebe o valor verdadeiro em todas as valorações possíveis
  - Contradição: a fórmula recebe o valor falso em todas as valorações possíveis
  - **Contingência:** a fórmula recebe valor verdadeiro em pelo menos uma valoração, e falso em pelo menos uma valoração

Exercícios em sala.

Principais tautologias

- Tautologias também são chamadas de *fórmulas válidas*
- Verifique a tabela (próximo slide) das principais tautologias quando precisar
- Delas derivarão todas as *regras de inferência* que trabalharemos

Principais tautologias

- Tautologias também são chamadas de *fórmulas válidas*
- Verifique a tabela (próximo slide) das principais tautologias quando precisar
- Delas derivarão todas as *regras de inferência* que trabalharemos

Principais tautologias

- Tautologias também são chamadas de *fórmulas válidas*
- Verifique a tabela (próximo slide) das principais tautologias quando precisar
- Delas derivarão todas as *regras de inferência* que trabalharemos

Continua...

Princípio de identidade	$X \Rightarrow X$
Princípio de não contradição	$\neg(X \wedge \neg X)$
Princípio do terceiro excluído	$X \vee \neg X$
Comutatividade da disjunção	$X \vee Y \Leftrightarrow Y \vee Y$
Comutatividade da conjunção	$X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$
Comutatividade do bi-condicional	$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (Y \leftrightarrow X)$
Associatividade da disjunção	$X \vee (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z$
Associatividade da conjunção	$X \wedge (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$
Associatividade do bi-condicional	$X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z$
Distributividade	$X \wedge (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
	$X \vee (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$
Idempotência da disjunção	$X \vee X \Leftrightarrow X$
Idempotência da conjunção	$X \wedge X \Leftrightarrow X$
Leis de De Morgan	$\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$
	$\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$
Dupla Negação	$\neg\neg X \Leftrightarrow Y$
Equivalência do condicional	$(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg X \vee Y$
Equivalência do bi-condicional	$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$
	$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$
Contraposição	$(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$
Exportação/Importação	$(X \wedge Y \rightarrow Z) \Leftrightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$
Modus Ponens	$X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$
Modus Tollens	$\neg Y \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg X$
Silogismo disjuntivo	$(X \vee Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$
Silogismo hipotético	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow (X \rightarrow Z)$
Refutação por absurdo	$(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$
Demonstração por absurdo	$(\neg X \rightarrow C) \Rightarrow X$ (C é uma contradição qualquer.)

C.I. 8.1: Consequência Lógica

- Uma proposição pode ser consequência lógica de um conjunto de premissas
  - Dizemos que a tal proposição é a conclusão do argumento
  - Trabalharemos apenas com conjuntos finitos
- A consequência lógica formal pode ser dividida em duas: (1) *consequência lógica semântica* ("⊨") e (2) *consequência lógica sintática* ("⊢")
- Notação:
  - $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\} \vDash / \vdash \beta$
  - Sendo $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$, temos que $\Gamma \vDash / \vdash \beta$, isto é, β
  - é consequência lógica semântica/sintática de Γ

C.I. 8.1: Consequência Lógica

- Uma proposição pode ser consequência lógica de um conjunto de premissas
  - Dizemos que a tal proposição é a conclusão do argumento
  - Trabalharemos apenas com conjuntos finitos
- A consequência lógica formal pode ser dividida em duas: (1) *consequência lógica semântica* ("$\vDash$") e (2) *consequência lógica sintática* ("$\vdash$")
- Notação:
  - $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\mathrm{n}}\} \vDash / \vdash \beta$
  - Sendo $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\mathrm{n}}\}$, temos que $\Gamma \vDash / \vdash \beta$, isto é, β
  - é consequência lógica semântica/sintática de Γ

C.I. 8.1: Consequência Lógica

- Uma proposição pode ser consequência lógica de um conjunto de premissas
  - Dizemos que a tal proposição é a conclusão do argumento
  - Trabalharemos apenas com conjuntos finitos
- A consequência lógica formal pode ser dividida em duas: (1) *consequência lógica semântica* ("⊨") e (2) *consequência lógica sintática* ("⊢")
- Notação:
  - $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\} \vDash / \vdash \beta$
  - Sendo $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$, temos que $\Gamma \vDash / \vdash \beta$, isto é, β
  - é consequência lógica semântica/sintática de Γ

C.I. 8.2: Consequência Lógica Semântica

- Uma fórmula β é consequência lógica semântica de Γ se, e somente se, ao conjugar cada fórmula de Γ ($\bigwedge\Gamma$), e, ao substituir $\vDash$ por $\Rightarrow$, formamos uma tautologia.
  - $(\Gamma \vDash \beta) \Leftrightarrow (\bigwedge\Gamma \Rightarrow \beta$ é tautologia$)$
- A tabela verdade é um procedimento de prova semântico

Exercícios em sala.

C.I. 8.2: Consequência Lógica Semântica

- Uma fórmula β é consequência lógica semântica de Γ se, e somente se, ao conjugar cada fórmula de Γ ($\bigwedge\Gamma$), e, ao substituir $\vDash$ por $\Rightarrow$, formamos uma tautologia.
  - ($\Gamma \vDash \beta$) $\Leftrightarrow$ ($\bigwedge\Gamma \Rightarrow \beta$ é tautologia)
- A tabela verdade é um procedimento de prova semântico

Exercícios em sala.

C.I. 8.3: Consequência Lógica Sintática

- Uma fórmula β é consequência lógica sintática de Γ se, e somente se, β é *deduzível* de Γ, ou se Γ *deduz* β.
  - Se é o caso, escrevemos: $\Gamma \vdash \beta$
- Logo veremos a estrutura de dedução que é foco do minicurso.

C.I. 8.3: Consequência Lógica Sintática

- Uma fórmula β é consequência lógica sintática de Γ se, e somente se, β é *deduzível* de Γ, ou se Γ *deduz* β.
  - Se é o caso, escrevemos: $\Gamma \vdash \beta$
- Logo veremos a estrutura de dedução que é foco do minicurso.

C.I. 8.4: Nota sobre consequência lógica

- A noção de consequência lógica semântica e consequência lógica sintática são *equivalentes* ($\Leftrightarrow$). Ou seja:
  - $(\Gamma \vDash \beta) \Leftrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$
- Este resultado é conhecido como o *Teorema de Correção e Completude*. Um rapaz muito inteligente chamado Kurt Gödel demonstrou em 1930 a parte referente à completude ($(\Gamma \vDash \beta) \Rightarrow (\mathrm{L} \vdash \beta)$) deste teorema.

C.I. 8.4: Nota sobre consequência lógica

- A noção de consequência lógica semântica e consequência lógica sintática são *equivalentes* (⇔). Ou seja:
  - $(\Gamma \vDash \beta) \Leftrightarrow (\mathrm{L} \vdash \beta)$
- Este resultado é conhecido como o *Teorema de Correção e Completude*. Um rapaz muito inteligente chamado Kurt Gödel demonstrou em 1930 a parte referente à completude ($(\Gamma \vDash \beta) \Rightarrow (\mathrm{L} \vdash \beta)$) deste teorema.

Dedução Natural (D.N.) 1: Noção Inicial

- Uma *fórmula/proposição primitiva* é uma fórmula aceita como válida sem demonstração, e da qual se deduzem outras fórmulas
- Uma *inferência* é uma afirmação (conclusão) nova baseada em fatos anteriores (premissas)
- Uma *regra de inferência* é um modelo de inferência que gera uma conclusão que é consequência lógica das premissas
- Uma *regra de inferência primitiva* é uma regra de inferência aceita sem demonstração, e da qual se *derivam* outras regras de inferência

Dedução Natural (D.N.) 1: Noção Inicial

- Uma *fórmula/proposição primitiva* é uma fórmula aceita como válida sem demonstração, e da qual se deduzem outras fórmulas
- Uma *inferência* é uma afirmação (conclusão) nova baseada em fatos anteriores (premissas)
- Uma *regra de inferência* é um modelo de inferência que gera uma conclusão que é consequência lógica das premissas
- Uma *regra de inferência primitiva* é uma regra de inferência aceita sem demonstração, e da qual se *derivam* outras regras de inferência

Dedução Natural (D.N.) 1: Noção Inicial

- Uma *fórmula/proposição primitiva* é uma fórmula aceita como válida sem demonstração, e da qual se deduzem outras fórmulas
- Uma *inferência* é uma afirmação (conclusão) nova baseada em fatos anteriores (premissas)
- Uma *regra de inferência* é um modelo de inferência que gera uma conclusão que é consequência lógica das premissas
- Uma *regra de inferência primitiva* é uma regra de inferência aceita sem demonstração, e da qual se *derivam* outras regras de inferência

Dedução Natural (D.N.) 1: Noção Inicial

- Uma *fórmula/proposição primitiva* é uma fórmula aceita como válida sem demonstração, e da qual se deduzem outras fórmulas
- Uma *inferência* é uma afirmação (conclusão) nova baseada em fatos anteriores (premissas)
- Uma *regra de inferência* é um modelo de inferência que gera uma conclusão que é consequência lógica das premissas
- Uma *regra de inferência primitiva* é uma regra de inferência aceita sem demonstração, e da qual se *derivam* outras regras de inferência

D.N. 2: Definição de Dedução

- Uma dedução de β a partir de um conjunto de fórmulas Γ é uma sequência finita $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ de fórmulas, onde $\delta_n = \beta$, e cada δ_i ou é uma premissa, ou hipótese a ser descartada, ou foi obtida, através da aplicação de regras de inferência primitiva, a partir de fórmulas em $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_j$, com $j < i$.

D.N. 3: Estrutura da Dedução Natural

1	Premissa 1	Indicação da premissa 1
2	Premissa 2	Indicação da premissa 2
3	Proposição	Justificação desta linha
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Conclusão	Justificativa da conclusão

Exemplos em sala.

D.N. 4: Regras de Inferência Diretas

Dupla Negação: DN

$$\frac{\neg\neg X}{X} \qquad \frac{X}{\neg\neg X}$$

Modus Ponens: MP

$$\frac{X \to Y \quad X}{Y}$$

Conjunção: C

$$\frac{X \quad Y}{X \land Y}$$

Separação: S

$$\frac{X \land Y}{X} \qquad \frac{X \land Y}{Y}$$

Expansão: E

$$\frac{X}{X \lor Y} \qquad \frac{X}{Y \lor X}$$

Silogismo Disjuntivo: SD

$$\frac{X \lor Y \quad \neg X}{Y} \qquad \frac{X \lor Y \quad \neg Y}{X}$$

Condicionais para bi-condicional: CB

$$\frac{X \to Y \quad Y \to X}{X \leftrightarrow Y}$$

Bi-condicional para condicionais: BC

$$\frac{X \leftrightarrow Y}{X \to Y} \qquad \frac{X \leftrightarrow Y}{Y \to X}$$

Exercícios em sala.

D.N. 5.1: Introduzindo uma Hipóteses

- Numa dedução, ao supor que uma certa fórmula é válida, dizemos que uma hipótese foi aberta.
- Essa suposição é considerada válida até que a hipótese se feche.
- Uma hipótese é sempre uma suposição temporária.

D.N. 5.1: Introduzindo uma Hipóteses

- Numa dedução, ao supor que uma certa fórmula é válida, dizemos que uma hipótese foi aberta.
- Essa suposição é considerada válida até que a hipótese se feche.
- Uma hipótese é sempre uma suposição temporária.

D.N. 5.1: Introduzindo uma Hipóteses

- Numa dedução, ao supor que uma certa fórmula é válida, dizemos que uma hipótese foi aberta.
- Essa suposição é considerada válida até que a hipótese se feche.
- Uma hipótese é sempre uma suposição temporária.

D.N. 5.2: Sintaxe da Hipótese

n	$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	Proposição comum	Justificativa
$n+2$	Proposição hipotética	**H**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

D.N. 5.3: Regras de Inferência Hipotéticas

- Duas regras hipotéticas serão apresentadas: a *Redução para Condicional* (RPC) e a *Contradição* (CTR)

m	X	**H** / ? **RPC**
	$\vdots$	$\vdots$
n	Y	...
	$X \rightarrow Y$	**RPC**, m-n

m	X	**H** / ? **CTR**
	$\vdots$	$\vdots$
n	Contradição	...
	$\neg X$	**CTR**, m-n

Exemplos em sala.

D.N. 6: Regras de Inferência Primitivas

- Tomaremos como primitivas as seguintes:
  - Dupla Negação (DN)
  - Conjunção (C)
  - Separação (S)
  - Expansão (E)
  - Modus Ponens (MP)
- Além disso, os três princípios da lógica clássica são fundamentais.
- Todas as regras se demonstram por recursividade

D.N. 6: Regras de Inferência Primitivas

- Tomaremos como primitivas as seguintes:
  - Dupla Negação (DN)
  - Conjunção (C)
  - Separação (S)
  - Expansão (E)
  - Modus Ponens (MP)
- Além disso, os três princípios da lógica clássica são fundamentais.
- Todas as regras se demonstram por recursividade

D.N. 6: Regras de Inferência Primitivas

- Tomaremos como primitivas as seguintes:
  - Dupla Negação (DN)
  - Conjunção (C)
  - Separação (S)
  - Expansão (E)
  - Modus Ponens (MP)
- Além disso, os três princípios da lógica clássica são fundamentais.
- Todas as regras se demonstram por recursividade

D.N. 7: Regras de Inferência Derivadas

- **Definição de Teorema:** Uma fórmula β é um teorema se, e somente se:
  - $\emptyset \vdash \beta$ ou simplesmente $\vdash \beta$
- *Regra reversível* (Ex.: DN)
- Pode-se demonstrar novas regras de inferência que agilizam as demonstrações.
  - Quadro no próximo slide.

D.N. 7: Regras de Inferência Derivadas

- **Definição de Teorema:** Uma fórmula β é um teorema se, e somente se:
  - $\emptyset \vdash \beta$ ou simplesmente $\vdash \beta$
- *Regra reversível* (Ex.: DN)
- Pode-se demonstrar novas regras de inferência que agilizam as demonstrações.
  - Quadro no próximo slide.

D.N. 7: Regras de Inferência Derivadas

- **Definição de Teorema:** Uma fórmula β é um teorema se, e somente se:
  - $\emptyset \vdash \beta$ ou simplesmente $\vdash \beta$
- *Regra reversível* (Ex.: DN)
- Pode-se demonstrar novas regras de inferência que agilizam as demonstrações.
  - Quadro no próximo slide.

Modus Tollens: **MT**

$$\begin{array}{c} X \to Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

Silogismo Hipotético: **SH**

$$\begin{array}{c} X \to Y \\ Y \to Z \\ \hline X \to Z \end{array}$$

Contradição: **CTR**

$$\begin{array}{c} X \\ \neg X \\ \hline Y \end{array}$$

Contraposição: **CT**

$$\begin{array}{c} \neg Y \to \neg X \\ \hline\hline X \to Y \end{array}$$

Regra reversível

Leis de De Morgan: **DM**

$$\begin{array}{c} \neg(X \wedge Y) \\ \hline\hline \neg X \vee \neg Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(X \vee Y) \\ \hline\hline \neg X \wedge \neg Y \end{array}$$

- Em sala
  - Mostre DM [comente estratégias de prova]
  - Mostre SD 1 [exercício: SD 2]
  - Mostre SH [exercício]
  - Mostre MT
  - Mostre CT
  - Mostre CTR

Estratégias de Prova. MORTARI, p. 259

Exercícios em sala.

Introdução ao CQC

(Cálculo Quantificacional Clássico)

C.I. 1: Predicados

- Predicados são relações
- O CQC é de 1ª ordem
- Cada predicado tem uma interpretação lógica
- A interpretação lógica de um predicado é um conjunto
- Se esse conjunto só pode ser vazio (sem sujeito), o predicado é *zero-ário*
- Se esse conjunto é composto de *n-uplas* ordenadas, o predicado é *n-ário*

Exemplos em sala.

C.I. 1: Predicados

- Predicados são relações
- O CQC é de 1ª ordem
- Cada predicado tem uma interpretação lógica
- A interpretação lógica de um predicado é um conjunto
- Se esse conjunto só pode ser vazio (sem sujeito), o predicado é *zero-ário*
- Se esse conjunto é composto de *n-uplas* ordenadas, o predicado é *n-ário*

Exemplos em sala.

C.I. 1: Predicados

- Predicados são relações
- O CQC é de 1ª ordem
- Cada predicado tem uma interpretação lógica
- A interpretação lógica de um predicado é um conjunto
- Se esse conjunto só pode ser vazio (sem sujeito), o predicado é *zero-ário*
- Se esse conjunto é composto de *n-uplas* ordenadas, o predicado é *n-ário*

Exemplos em sala.

C.I. 1: Predicados

- Predicados são relações
- O CQC é de 1ª ordem
- Cada predicado tem uma interpretação lógica
- A interpretação lógica de um predicado é um conjunto
- Se esse conjunto só pode ser vazio (sem sujeito), o predicado é *zero-ário*
- Se esse conjunto é composto de *n-uplas* ordenadas, o predicado é *n-ário*

Exemplos em sala.

C.I. 1: Predicados

- Predicados são relações
- O CQC é de 1ª ordem
- Cada predicado tem uma interpretação lógica
- A interpretação lógica de um predicado é um conjunto
- Se esse conjunto só pode ser vazio (sem sujeito), o predicado é *zero-ário*
- Se esse conjunto é composto de *n-uplas* ordenadas, o predicado é *n-ário*

Exemplos em sala.

C.I. 1: Predicados

- Predicados são relações
- O CQC é de 1ª ordem
- Cada predicado tem uma interpretação lógica
- A interpretação lógica de um predicado é um conjunto
- Se esse conjunto só pode ser vazio (sem sujeito), o predicado é *zero-ário*
- Se esse conjunto é composto de *n-uplas* ordenadas, o predicado é *n-ário*

Exemplos em sala.

C.I. 2.1: Sintaxe dos Predicados

- Para predicados, reservaremos letras maiúsculas A, B, C, ... V
  - Chamaremos estas letras de constantes de predicado
  - X, Y, Z e W são para predicados quaisquer
- Os elementos que compõem as n-uplas ordenadas do conjunto interpretação dos predicados são os sujeitos
- Aos sujeitos, reservaremos as letras minúsculas a, b, c, ..., v
  - Chamaremos estas letras de constantes individuais
  - x, y, z e w são para sujeitos quaisquer

C.I. 2.1: Sintaxe dos Predicados

- Para predicados, reservaremos letras maiúsculas A, B, C, ... V
  - Chamaremos estas letras de constantes de predicado
  - X, Y, Z e W são para predicados quaisquer
- Os elementos que compõem as n-uplas ordenadas do conjunto interpretação dos predicados são os sujeitos
- Aos sujeitos, reservaremos as letras minúsculas a, b, c, ..., v
  - Chamaremos estas letras de constantes individuais
  - x, y, z e w são para sujeitos quaisquer

C.I. 2.1: Sintaxe dos Predicados

- Para predicados, reservaremos letras maiúsculas A, B, C, ... V
  - Chamaremos estas letras de constantes de predicado
  - X, Y, Z e W são para predicados quaisquer
- Os elementos que compõem as n-uplas ordenadas do conjunto interpretação dos predicados são os sujeitos
- Aos sujeitos, reservaremos as letras minúsculas a, b, c, ..., v
  - Chamaremos estas letras de constantes individuais
  - x, y, z e w são para sujeitos quaisquer

C.I. 2.2: Sintaxe dos Predicados

- Uma *proposição predicativa* é composta pela constante de predicado seguida da(s) constante(s) individuais (quando houver, na ordem que aparecem na n-upla). Ex.:
  - Mm (O predicado é Mx: x morreu, e o sujeito m: Marcelo)
  - Kp (o predicado é Kx: x é skatista, e o sujeito: p: Paulo
  - C (o predicado é C: chove, e não há sujeito)
  - Lmj (O predicado é Nxy: x é a namorada de y, e os sujeitos m: Maria, e j: José)
- Dedução e tabelas verdade até agora tem mesma sintaxe de antes

Exercícios em sala.

C.I. 2.2: Sintaxe dos Predicados

- Uma _proposição predicativa_ é composta pela constante de predicado seguida da(s) constante(s) individuais (quando houver, na ordem que aparecem na n-upla). Ex.:
  - Mm (O predicado é Mx: x morreu, e o sujeito m: Marcelo)
  - Kp (o predicado é Kx: x é skatista, e o sujeito: p: Paulo
  - C (o predicado é C: chove, e não há sujeito)
  - Lmj (O predicado é Nxy: x é a namorada de y, e os sujeitos m: Maria, e j: José)
- Dedução e tabelas verdade até agora tem mesma sintaxe de antes

Exercícios em sala.

C.I. 2.2: Sintaxe dos Predicados

- Uma *proposição predicativa* é composta pela constante de predicado seguida da(s) constante(s) individuais (quando houver, na ordem que aparecem na n-upla). Ex.:
  - Mm (O predicado é Mx: x morreu, e o sujeito m: Marcelo)
  - Kp (o predicado é Kx: x é skatista, e o sujeito: p: Paulo
  - C (o predicado é C: chove, e não há sujeito)
  - Lmj (O predicado é Nxy: x é a namorada de y, e os sujeitos m: Maria, e j: José)
- Dedução e tabelas verdade até agora tem mesma sintaxe de antes

Exercícios em sala.

C.I. 3.1: Introduzindo os Quantificadores

- Para formalizar proposições de caráter geral, usam-se os quantificadores
- O CQC conta com dois deles: O quantificador existencial (∃) e o quantificador universal (∀)
- No CQC, o quantificador quantifica apenas constantes individuais (é de 1ª ordem)
- Na fórmula, usa-se variáveis para indivíduos quaisquer
- Usa-se um quantificador para cada variável

C.I. 3.1: Introduzindo os Quantificadores

- Para formalizar proposições de caráter geral, usam-se os quantificadores
- O CQC conta com dois deles: O quantificador existencial ($\exists$) e o quantificador universal ($\forall$)
- No CQC, o quantificador quantifica apenas constantes individuais (é de 1ª ordem)
- Na fórmula, usa-se variáveis para indivíduos quaisquer
- Usa-se um quantificador para cada variável

C.I. 3.1: Introduzindo os Quantificadores

- Para formalizar proposições de caráter geral, usam-se os quantificadores
- O CQC conta com dois deles: O quantificador existencial (∃) e o quantificador universal (∀)
- No CQC, o quantificador quantifica apenas constantes individuais (é de 1ª ordem)
- Na fórmula, usa-se variáveis para indivíduos quaisquer
- Usa-se um quantificador para cada variável

C.I. 3.1: Introduzindo os Quantificadores

- Para formalizar proposições de caráter geral, usam-se os quantificadores
- O CQC conta com dois deles: O quantificador existencial (∃) e o quantificador universal (∀)
- No CQC, o quantificador quantifica apenas constantes individuais (é de 1ª ordem)
- Na fórmula, usa-se variáveis para indivíduos quaisquer
- Usa-se um quantificador para cada variável

C.I. 3.1: Introduzindo os Quantificadores

- Para formalizar proposições de caráter geral, usam-se os quantificadores
- O CQC conta com dois deles: O quantificador existencial (∃) e o quantificador universal (∀)
- No CQC, o quantificador quantifica apenas constantes individuais (é de 1ª ordem)
- Na fórmula, usa-se variáveis para indivíduos quaisquer
- Usa-se um quantificador para cada variável

C.I. 3.2: Sintaxe dos Quantificadores

- Exposição da sintaxe:
  - *Ax: x é ama. ∀xAx: todos amam. ∃xAx: alguém ama*
- O escopo do quantificador é a fórmula onde o quantificador incide
  - Em ∀xAx, Ax é o escopo de ∀x
- Quantificação de fórmulas moleculares:
  - Em ∀x(Kx → Mm), (Kx → Mm) é o escopo de ∀x

C.I. 3.2: Sintaxe dos Quantificadores

- Exposição da sintaxe:
  - Ax: x é ama. ∀xAx: todos amam. ∃xAx: alguém ama
- O escopo do quantificador é a fórmula onde o quantificador incide
  - Em ∀xAx, Ax é o escopo de ∀x
- Quantificação de fórmulas moleculares:
  - Em ∀x(Kx → Mm), (Kx → Mm) é o escopo de ∀x

C.I. 3.2: Sintaxe dos Quantificadores

- Exposição da sintaxe:
  - Ax: x é ama. ∀xAx: todos amam. ∃xAx: alguém ama
- O escopo do quantificador é a fórmula onde o quantificador incide
  - Em ∀xAx, Ax é o escopo de ∀x
- Quantificação de fórmulas moleculares:
  - Em $\forall x(Kx \rightarrow Mm)$, $(Kx \rightarrow Mm)$ é o escopo de $\forall x$

C.I. 3.3: Mais Informações

- Uma fórmula como $Ax \rightarrow Mx$ é chamada de *fórmula de variáveis livres*
- Fórmulas como $\exists xAx$ são chamadas de *fórmulas gerais*
  - No CQC, há dois tipos de fórmulas gerais: $\exists x\beta$ e $\forall x\beta$, onde β é uma fórmula onde x ocorre livre
  - $\forall x(Ax \rightarrow Mm)$ é uma fórmula geral, $\forall xAx \rightarrow Mm$, não
- Proposições categóricas

Exemplos e exercícios em sala.

C.I. 3.3: Mais Informações

- Uma fórmula como $Ax \rightarrow Mx$ é chamada de *fórmula de variáveis livres*
- Fórmulas como $\exists x Ax$ são chamadas de *fórmulas gerais*
  - No CQC, há dois tipos de fórmulas gerais: $\exists x\beta$ e $\forall x\beta$, onde β é uma fórmula onde x ocorre livre
  - $\forall x(Ax \rightarrow Mm)$ é uma fórmula geral, $\forall x Ax \rightarrow Mm$, não
- Proposições categóricas

Exemplos e exercícios em sala.

C.I. 3.3: Mais Informações

- Uma fórmula como $Ax \rightarrow Mx$ é chamada de *fórmula de variáveis livres*
- Fórmulas como $\exists xAx$ são chamadas de *fórmulas gerais*
  - No CQC, há dois tipos de fórmulas gerais: $\exists x\beta$ e $\forall x\beta$, onde β é uma fórmula onde x ocorre livre
  - $\forall x(Ax \rightarrow Mm)$ é uma fórmula geral, $\forall xAx \rightarrow Mm$, não
- Proposições categóricas

Exemplos e exercícios em sala.

C.I. 4: Quantificação Múltipla

- *Fórmulas multiplamente quantificadas*
- A ordem dos quantificadores na quantificação múltipla é essencial para sua semântica
  - Seja Fxy: x é filho de y. $\forall x \exists x Fxy$ tem semântica diferente de $\exists x \forall x Fxy$.

Exemplos e exercícios em sala.

C.I. 4: Quantificação Múltipla

- *Fórmulas multiplamente quantificadas*
- A ordem dos quantificadores na quantificação múltipla é essencial para sua semântica
  - Seja Fxy: x é filho de y. ∀x∃xFxy tem semântica diferente de ∃x∀xFxy

Exemplos e exercícios em sala.

Procedimentos de prova para o CQC

Tabelas Verdade no CQC

- As tabelas verdade são um instrumento proposicional.

$\forall x Bx$	Ba	$\forall x Bx \to Ba$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F** ???
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

- Existem (infinitas) fórmulas válidas que não são tautologias

Comentário Sobre Variáveis Livres

- Fórmulas de variáveis livres não são proposições
- Estas fórmulas geram conjuntos
  - Falar sobre especificação de conjuntos
- Toda fórmula tem um *fecho*
  - Fecho universal

Comentário Sobre Variáveis Livres

- Fórmulas de variáveis livres não são proposições
- Estas fórmulas geram conjuntos
  - Falar sobre especificação de conjuntos
- Toda fórmula tem um *fecho*
  - Fecho universal

Comentário Sobre Variáveis Livres

- Fórmulas de variáveis livres não são proposições
- Estas fórmulas geram conjuntos
  - Falar sobre especificação de conjuntos
- Toda fórmula tem um *fecho*
  - Fecho universal

Dedução Natural no CQC (D.N.) 1.1: Noção Inicial

- Nada se alterará substancialmente
  - Constantes de predicados n-ários são fórmulas atômicas
- Quatro novas regras de inferência diretas serão definidas para os quantificadores
- Duas regras derivadas serão acrescentadas para os quantificadores

Dedução Natural no CQC (D.N.) 1.1: Noção Inicial

- Nada se alterará substancialmente
  - Constantes de predicados n-ários são fórmulas atômicas
- Quatro novas regras de inferência diretas serão definidas para os quantificadores
- Duas regras derivadas serão acrescentadas para os quantificadores

Dedução Natural no CQC (D.N.) 1.1: Noção Inicial

- Nada se alterará substancialmente
  - Constantes de predicados n-ários são fórmulas atômicas
- Quatro novas regras de inferência diretas serão definidas para os quantificadores
- Duas regras derivadas serão acrescentadas para os quantificadores

D.N. 1.2: Nota sobre a aplicação das regras

- As regras se aplicarão somente a fórmulas gerais
  - Fórmulas do tipo $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$
- Em $\forall x\alpha$, a variável x ocorre livre em α, e $\forall x$ quantifica (fecha) essa variável
- $\alpha[x/c]$ denotará a fórmula resultante da substituição (de todas ou de algumas) das ocorrências livres da variável x por c em α

Exemplos em sala.

D.N. 1.2: Nota sobre a aplicação das regras

- As regras se aplicarão somente a fórmulas gerais
  - Fórmulas do tipo $\forall x \alpha$ e $\exists x \alpha$
- Em $\forall x \alpha$, a variável x ocorre livre em α, e $\forall x$ quantifica (fecha) essa variável
- $\alpha[x/c]$ denotará a fórmula resultante da substituição (de todas ou de algumas) das ocorrências livres da variável x por c em α

Exemplos em sala.

D.N. 1.2: Nota sobre a aplicação das regras

- As regras se aplicarão somente a fórmulas gerais
  - Fórmulas do tipo ∀xα e ∃xα
- Em ∀xα, a variável x ocorre livre em α, e ∀x quantifica (fecha) essa variável
- $\alpha[x/c]$ denotará a fórmula resultante da substituição (de todas ou de algumas) das ocorrências livres da variável x por c em α

Exemplos em sala.

D.N. 2.1: Regra de Eliminação do Universal (E∀)

Eliminação do Universal (E∀): $$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[x/c]}$$

- De ∀xα, podemos derivar $\alpha[x/c]$ para qualquer constante c

Exemplos em sala.

D.N. 2.1.1: Regra de Introdução do Universal (I∀)

- Seja $\alpha(c)$ uma fórmula onde a constante c ocorre, e $\alpha[c/x]$ a f... de <u>todas</u>... Então:

Introdução do Universal (I∀): $$\frac{\alpha(c)}{\forall x \alpha[c/x]}$$

- Desde que (1) a constante c não ocorra em premissa, nem em hipótese que ainda esteja valendo na linha de $\alpha(c)$, e (2) a constante c seja *substituível* por x em $\alpha(c)$

Exemplos em sala.

D.N. 2.1.1: Regra de Introdução do Universal (I∀)

- Seja $\alpha(c)$ uma fórmula onde a constante c ocorre, e $\alpha[c/x]$ a f... de <u>todas</u>... Então:

Introdução do Universal (I∀): $$\frac{\alpha(c)}{\forall x \alpha[c/x]}$$

- Desde que (1) a constante c não ocorra em premissa, nem em hipótese que ainda esteja valendo na linha de $\alpha(c)$, e (2) a constante c seja *substituível* por x em $\alpha(c)$

Exemplos em sala.

D.N. 2.2.2: Definição de constante substituível por variável

- Seja $\alpha(c)$ uma fórmula onde uma constante c ocorre. Dizemos que c é substituível por x em $\alpha(c)$ se nenhuma parte de $\alpha(c)$ da forma $\exists x\beta$ ou $\forall x\beta$ contém c

Exemplos em sala.

>Resumo das Regras para o Quantificador Universal<

Eliminação do Universal (E∀)	Introdução do Universal I∀
$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[x/c]}$$	$$\frac{\alpha(c)}{\forall x \alpha[c/x]}$$
para qualquer constante c.	desde que c não ocorre em alguma premissa ou em hipótese aberta, e que c seja substituível por x em α

Exercícios em sala.

D.N. 3: Regra de Introdução do Existencial (I∃)

- Seja $\alpha(c)$ uma fórmula onde a constante c ocorre, e $\alpha[c/x]$ a f... de <u>uma ou mais</u>... Então:

Introdução do existencial (I∃): $$\frac{\alpha(c)}{\exists x \alpha[c/x]}$$

- Desde que c seja substituível por x em α

Exemplos em sala.

D.N. 3: Regra de Introdução do Existencial (I∃)

- Seja $\alpha(c)$ uma fórmula onde a constante c ocorre, e $\alpha[c/x]$ a f... de <u>uma ou mais</u>... Então:

$$\text{Introdução do existencial (I}\exists\text{):} \qquad \frac{\alpha(c)}{\exists x \alpha[c/x]}$$

- Desde que c seja substituível por x em α

Exemplos em sala.

D.N. 4: Regra de Eliminação do Existencial (E∃)

- Sendo $\alpha[c/x]$ a f... de <u>todas</u>..., temos:

Eliminação do existencial (E∃):

$$
\begin{array}{|l}
\exists x \alpha \\
\quad \begin{array}{|l}
\alpha[x/c] \\ \hline
\vdots \\
\beta
\end{array} \\
\beta
\end{array}
$$

- A fórmula é aplicável desde que c: (1) não ocorra em premissa alguma, (2) nem em hipótese vigente, (3) nem em α e (4) nem em β.

Exemplos em sala.

D.N. 4: Regra de Eliminação do Existencial (E∃)

- Sendo $\alpha[c/x]$ a f... de <u>todas</u>..., temos:

Eliminação do existencial (E∃):

$$
\begin{array}{|l}
\exists x \alpha \\
\quad \begin{array}{|l}
\alpha[x/c] \\ \hline
\vdots \\
\beta
\end{array} \\
\beta
\end{array}
$$

- A fórmula é aplicável desde que c: (1) não ocorra em premissa alguma, (2) nem em hipótese vigente, (3) nem em α e (4) nem em β.

Exemplos em sala.

>Resumo das Regras para o Quantificador Existencial<

Introdução do existencial (I∃)

$$\frac{\alpha(c)}{\exists x \alpha[c/x]}$$

para qualquer constante c

substituível por x em α

Eliminação do existencial (E∃)

$$\begin{array}{|l}
\exists x \alpha \\
\begin{array}{|l}
\alpha[x/c] \\ \hline
\vdots \\
\beta
\end{array} \\
\beta
\end{array}$$

desde que c não ocorra em

premissa, nem em hipótese

aberta, nem em α e nem em β

D.N. 5: Regras de Inferência Derivadas

- *Intercâmbio de quantificadores* (IQ):

$$\frac{\neg\forall x\alpha}{\exists x\neg\alpha} \qquad\qquad \frac{\neg\exists x\alpha}{\forall x\neg\alpha}$$

[demonstrações em sala]

D.N. 6.1: Erros comuns (violação das regras)

1	$\forall x Bx \rightarrow Hb$	P
2	$Ba \rightarrow Hb$	E$\forall$, 1

1	$\forall x(Gxx \rightarrow Nx)$	P	
2	$Gpp \rightarrow Np$	E$\forall$, 1	
3	$\forall y(Gyp \rightarrow Ny)$	I$\forall$	ERRO!

1	$Fl \rightarrow Ll$	P	
2	$\exists x Fx \rightarrow Ll$	I$\exists$, 1	ERRO!

D.N. 6.1: Erros comuns (violação das regras)

1	$\forall x Bx \rightarrow Hb$	P
2	$Ba \rightarrow Hb$	E$\forall$, 1

1	$\forall x(Gxx \rightarrow Nx)$	P	
2	$Gpp \rightarrow Np$	E$\forall$, 1	
3	$\forall y(Gyp \rightarrow Ny)$	I$\forall$	ERRO!

1	$Fl \rightarrow Ll$	P	
2	$\exists x Fx \rightarrow Ll$	I$\exists$, 1	ERRO!

D.N. 6.1: Erros comuns (violação das regras)

1	$\forall x Bx \rightarrow Hb$	P
2	$Ba \rightarrow Hb$	E$\forall$, 1

1	$\forall x(Gxx \rightarrow Nx)$	P	
2	$Gpp \rightarrow Np$	E$\forall$, 1	
3	$\forall y(Gyp \rightarrow Ny)$	I$\forall$	ERRO!

1	$Fl \rightarrow Ll$	P	
2	$\exists x Fx \rightarrow Ll$	I$\exists$, 1	ERRO!

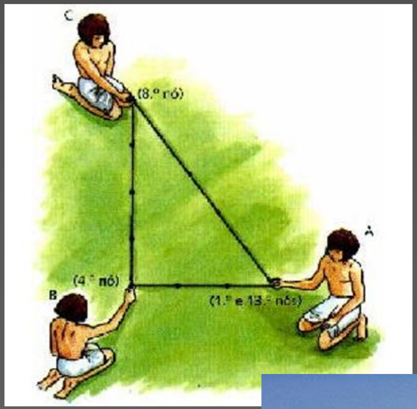
D.N. 6.2: Erros comuns (violação das regras)

1	$\exists x(Px \wedge Cx)$	P	
2	$\exists x(Fx \wedge Cx)$	P	
3	$Pa \wedge Ca$	H / (Para E∃)	
4	$Fa \wedge Ca$	H / (Para E∃ ???)	
5	Pa	S, 3	
6	Fa	S, 4	
7	$Pa \wedge Fa$	5,6, C	
8	$\exists x(Px \wedge Fx)$	7, I∃	
9	$\exists x(Px \wedge Fx)$	2,4-8, E∃	ERRADO!
10	$\exists x(Px \wedge Fx)$	1,3-9, E∃	

Dedução Natural Aplicada a Sistemas Axiomáticos

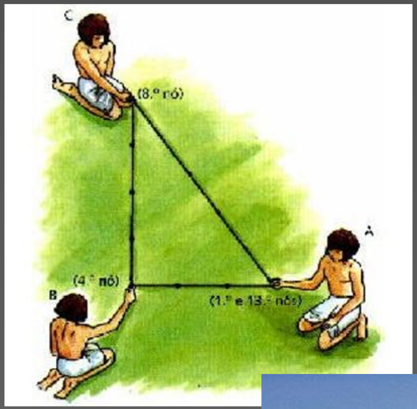
Axiomatização e Formalização (A.F.) 1: O Começo de Tudo

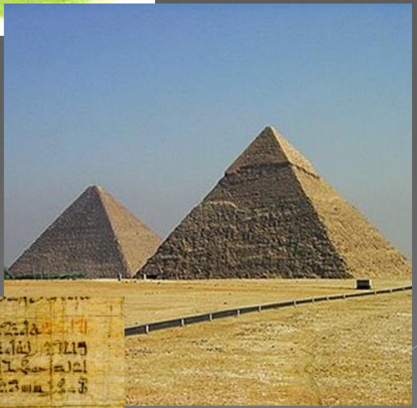
- Egito
  - Geometria egípcia, Rio Nilo, há 4500
  - Não haviam formalismos de qualquer tipo
  - O foco do conhecimento era a aplicação
- Grécia
  - Geometria grega, Mileto, século IV a.C.
  - Primeiros vestígios formais de um sistema geométrico
  - Conhecimentos aplicáveis e abstratos
  - Primeiras demonstrações
  - Estoque de sentenças verdadeiras acumulados



Axiomatização e Formalização (A.F.) 1: O Começo de Tudo

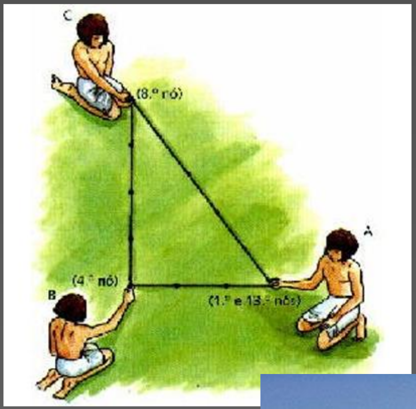
- Egito
  - Geometria egípcia, Rio Nilo, há 4500
  - Não haviam formalismos de qualquer tipo
  - O foco do conhecimento era a aplicação
- Grécia
  - Geometria grega, Mileto, século IV a.C.
  - Primeiros vestígios formais de um sistema geométrico
  - Conhecimentos aplicáveis e abstratos
  - Primeiras demonstrações
  - Estoque de sentenças verdadeiras acumulados

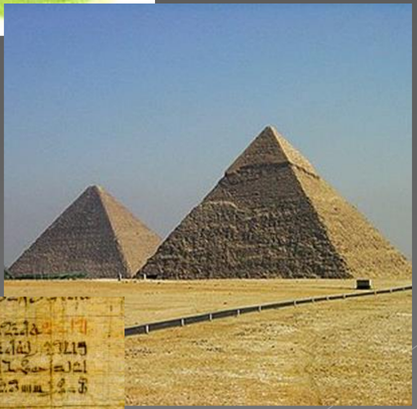




Axiomatização e Formalização (A.F.) 1: O Começo de Tudo

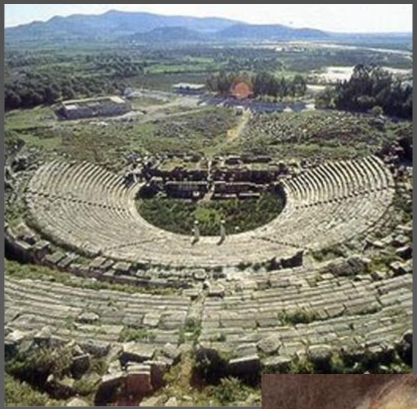
- Egito
  - Geometria egípcia, Rio Nilo, há 4500
  - Não haviam formalismos de qualquer tipo
  - O foco do conhecimento era a aplicação
- Grécia
  - Geometria grega, Mileto, século IV a.C.
  - Primeiros vestígios formais de um sistema geométrico
  - Conhecimentos aplicáveis e abstratos
  - Primeiras demonstrações
  - Estoque de sentenças verdadeiras acumulados

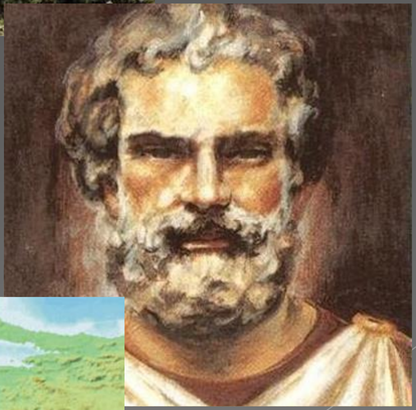




Axiomatização e Formalização (A.F.) 1: O Começo de Tudo

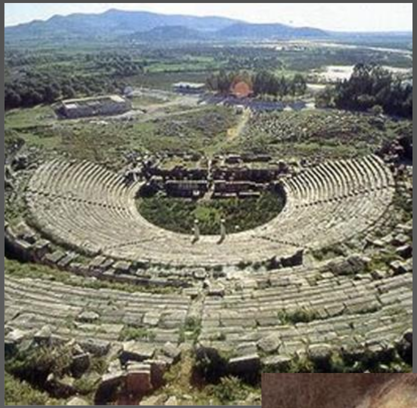
- Egito
  - Geometria egípcia, Rio Nilo, há 4500
  - Não haviam formalismos de qualquer tipo
  - O foco do conhecimento era a aplicação
- Grécia
  - Geometria grega, Mileto, século IV a.C.
  - Primeiros vestígios formais de um sistema geométrico
  - Conhecimentos aplicáveis e abstratos
  - Primeiras demonstrações
  - Estoque de sentenças verdadeiras acumulados

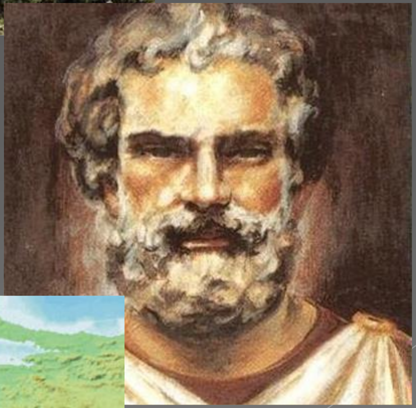




Axiomatização e Formalização (A.F.) 1: O Começo de Tudo

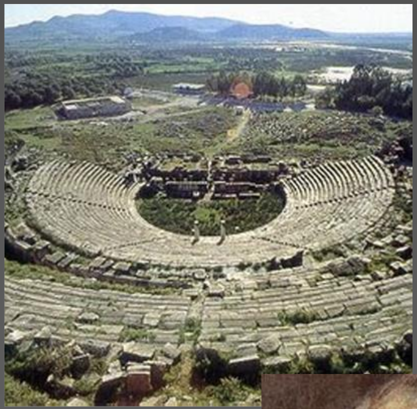
- Egito
  - Geometria egípcia, Rio Nilo, há 4500
  - Não haviam formalismos de qualquer tipo
  - O foco do conhecimento era a aplicação
- Grécia
  - Geometria grega, Mileto, século IV a.C.
  - Primeiros vestígios formais de um sistema geométrico
  - Conhecimentos aplicáveis e abstratos
  - Primeiras demonstrações
  - Estoque de sentenças verdadeiras acumulados

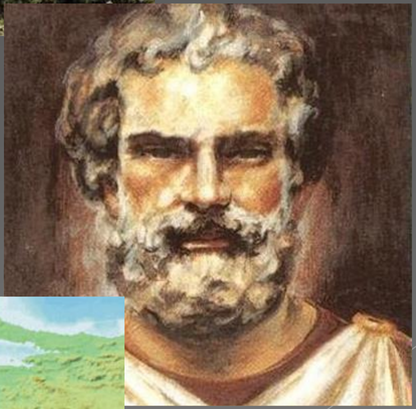




Axiomatização e Formalização (A.F.) 1: O Começo de Tudo

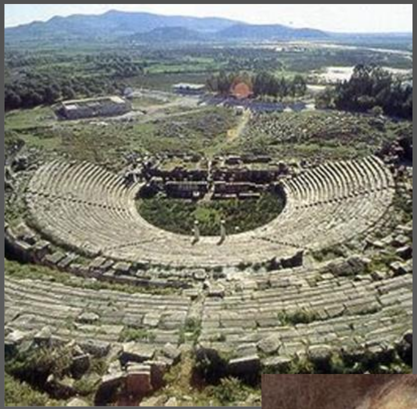
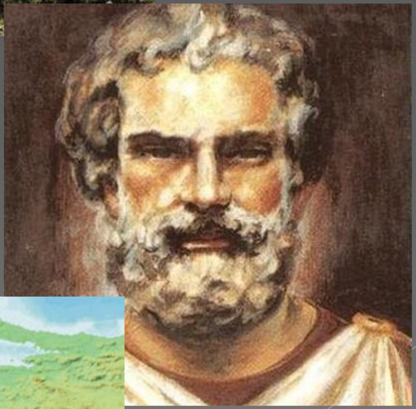
- Egito
  - Geometria egípcia, Rio Nilo, há 4500
  - Não haviam formalismos de qualquer tipo
  - O foco do conhecimento era a aplicação
- Grécia
  - Geometria grega, Mileto, século IV a.C.
  - Primeiros vestígios formais de um sistema geométrico
  - Conhecimentos aplicáveis e abstratos
  - Primeiras demonstrações
  - Estoque de sentenças verdadeiras acumulados





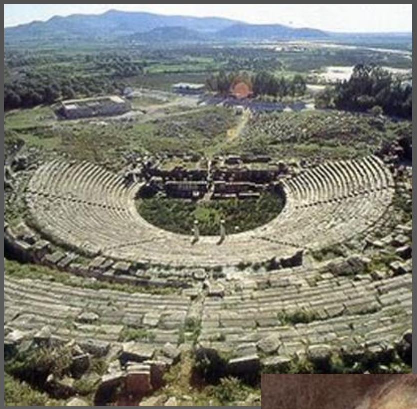
Axiomatização e Formalização (A.F.) 1: O Começo de Tudo

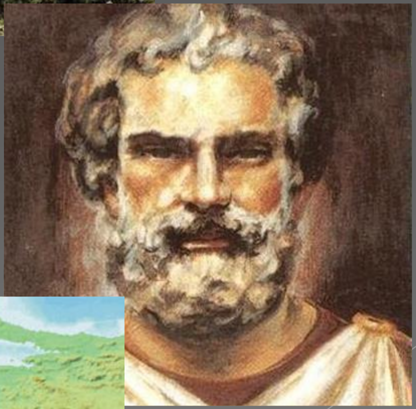
- Egito
  - Geometria egípcia, Rio Nilo, há 4500
  - Não haviam formalismos de qualquer tipo
  - O foco do conhecimento era a aplicação
- Grécia
  - Geometria grega, Mileto, século IV a.C.
  - Primeiros vestígios formais de um sistema geométrico
  - Conhecimentos aplicáveis e abstratos
  - Primeiras demonstrações
  - Estoque de sentenças verdadeiras acumulados


Axiomatização e Formalização (A.F.) 1: O Começo de Tudo

- Egito
  - Geometria egípcia, Rio Nilo, há 4500
  - Não haviam formalismos de qualquer tipo
  - O foco do conhecimento era a aplicação
- Grécia
  - Geometria grega, Mileto, século IV a.C.
  - Primeiros vestígios formais de um sistema geométrico
  - Conhecimentos aplicáveis e abstratos
  - Primeiras demonstrações
  - Estoque de sentenças verdadeiras acumulados





A.F. 2: Primeiros Problemas

- Regresso "*ad infinitum*"
  - Sentenças demonstráveis por sentenças demonstráveis por sentenças...
  - Termos definíveis por termos definíveis por...
- Círculo vicioso
  - Sentenças demonstráveis por sentenças demonstradas por elas
  - Termos definíveis por termos definidos por eles
- Fatos advindos da "intuição intelectual"
  - Estoque de sentenças consideradas intuitivamente verdadeiras grande de mais
  - Estoque de termos aceitos como intuitivamente evidentes grande de mais

A.F. 2: Primeiros Problemas

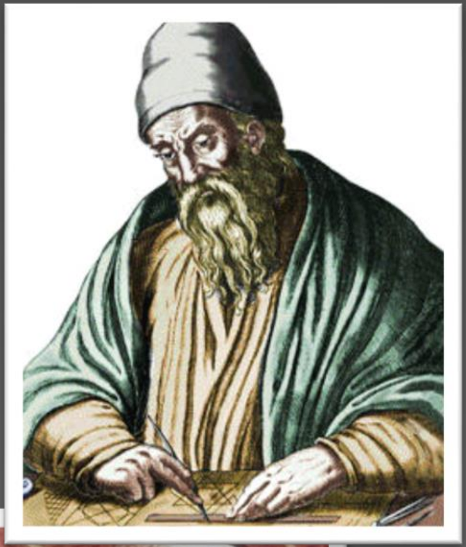
- Regresso "*ad infinitum*"
  - Sentenças demonstráveis por sentenças demonstráveis por sentenças...
  - Termos definíveis por termos definíveis por...
- Círculo vicioso
  - Sentenças demonstráveis por sentenças demonstradas por elas
  - Termos definíveis por termos definidos por eles
- Fatos advindos da "intuição intelectual"
  - Estoque de sentenças consideradas intuitivamente verdadeiras grande de mais
  - Estoque de termos aceitos como intuitivamente evidentes grande de mais

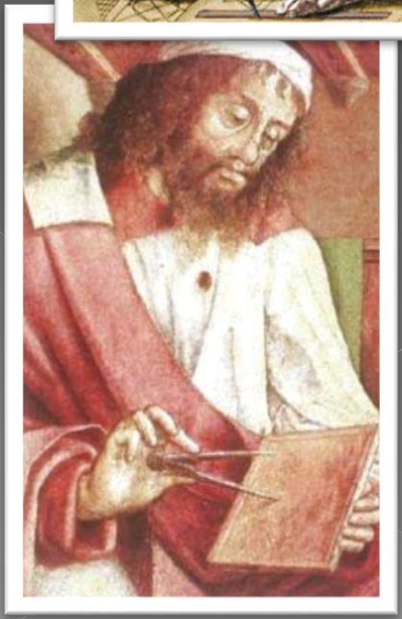
A.F. 2: Primeiros Problemas

- Regresso “*ad infinitum*”
  - Sentenças demonstráveis por sentenças demonstráveis por sentenças...
  - Termos definíveis por termos definíveis por...
- Círculo vicioso
  - Sentenças demonstráveis por sentenças demonstradas por elas
  - Termos definíveis por termos definidos por eles
- Fatos advindos da “intuição intelectual”
  - Estoque de sentenças consideradas intuitivamente verdadeiras grande de mais
  - Estoque de termos aceitos como intuitivamente evidentes grande de mais

A.F. 3: Primeiras Soluções

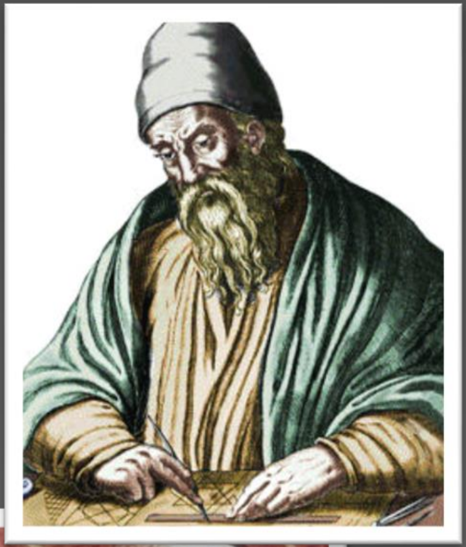
- Euclides, *Os Elementos*, século III a.C.
  - Conceito de sistema axiomático
    - Redução de sentenças intuitivamente verdadeiras reduzidas ao mínimo (axiomas ou postulados)
    - Redução de termos aceitos sem definição reduzidos ao mínimo (termos primitivos)
    - Todas as demais sentenças deveriam ser demonstradas a partir dos axiomas pela argumentação do geômetra
    - O mesmo vale para os termos
- Método inquestionado por 2000 anos!

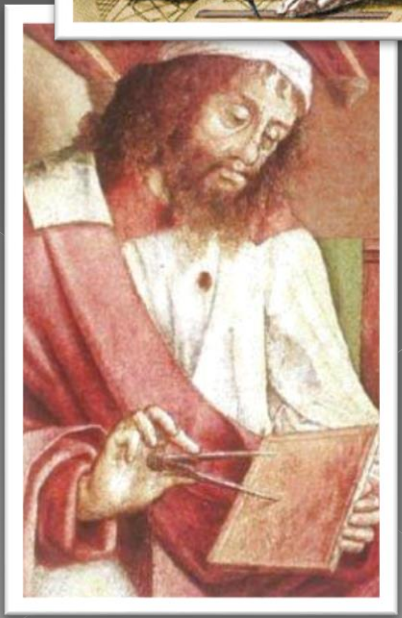




A.F. 3: Primeiras Soluções

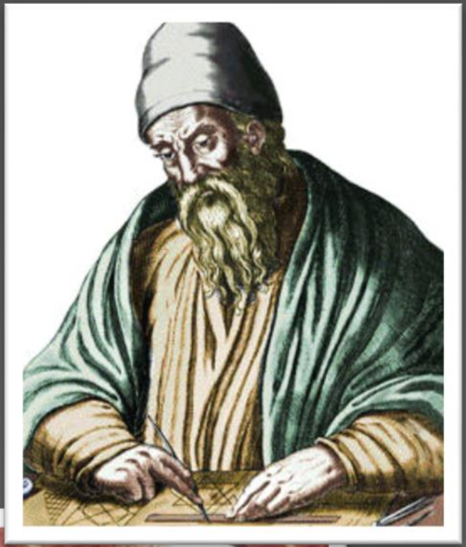
- Euclides, *Os Elementos*, século III a.C.
  - Conceito de sistema axiomático
    - Redução de sentenças intuitivamente verdadeiras reduzidas ao mínimo (axiomas ou postulados)
    - Redução de termos aceitos sem definição reduzidos ao mínimo (termos primitivos)
    - Todas as demais sentenças deveriam ser demonstradas a partir dos axiomas pela argumentação do geômetra
    - O mesmo vale para os termos
- Método inquestionado por 2000 anos!

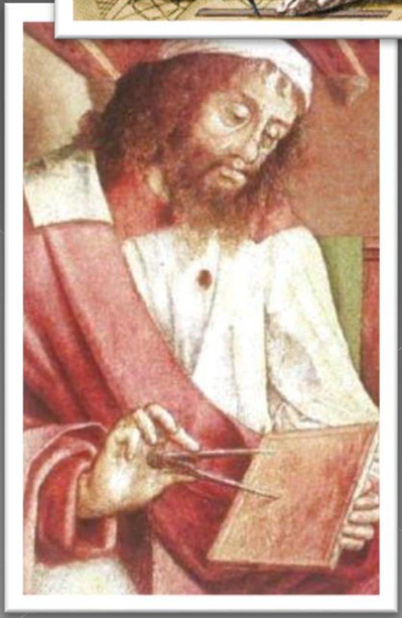




A.F. 3: Primeiras Soluções

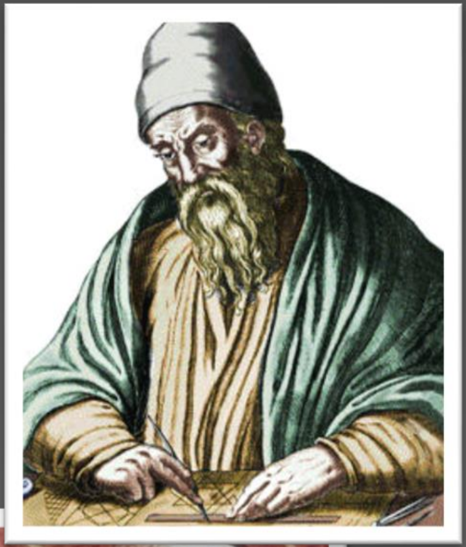
- Euclides, *Os Elementos*, século III a.C.
  - Conceito de sistema axiomático
    - Redução de sentenças intuitivamente verdadeiras reduzidas ao mínimo (axiomas ou postulados)
    - Redução de termos aceitos sem definição reduzidos ao mínimo (termos primitivos)
    - Todas as demais sentenças deveriam ser demonstradas a partir dos axiomas pela argumentação do geômetra
    - O mesmo vale para os termos
- Método inquestionado por 2000 anos!

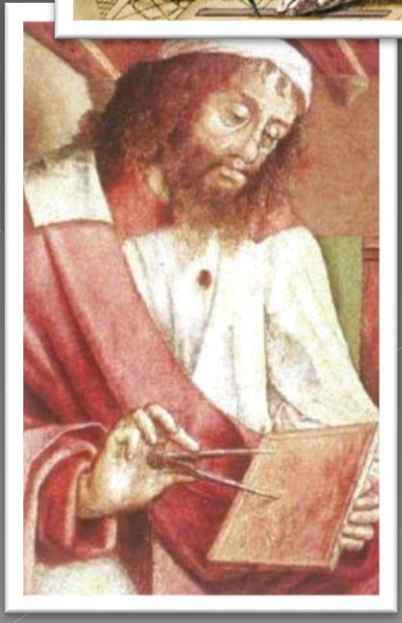




A.F. 3: Primeiras Soluções

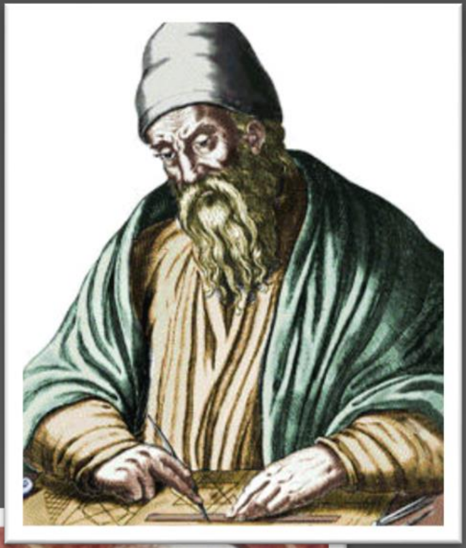
- Euclides, *Os Elementos*, século III a.C.
  - Conceito de sistema axiomático
    - Redução de sentenças intuitivamente verdadeiras reduzidas ao mínimo (axiomas ou postulados)
    - Redução de termos aceitos sem definição reduzidos ao mínimo (termos primitivos)
    - Todas as demais sentenças deveriam ser demonstradas a partir dos axiomas pela argumentação do geômetra
    - O mesmo vale para os termos
- Método inquestionado por 2000 anos!

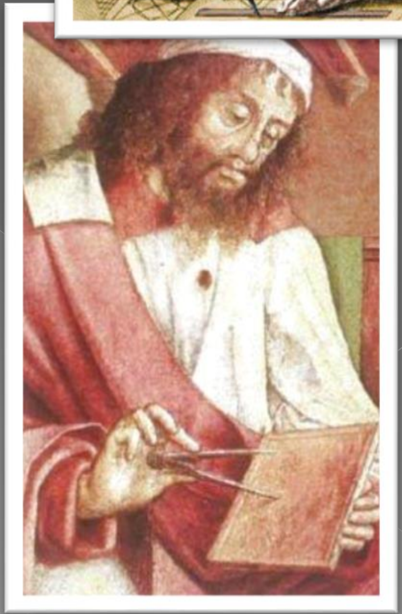




A.F. 3: Primeiras Soluções

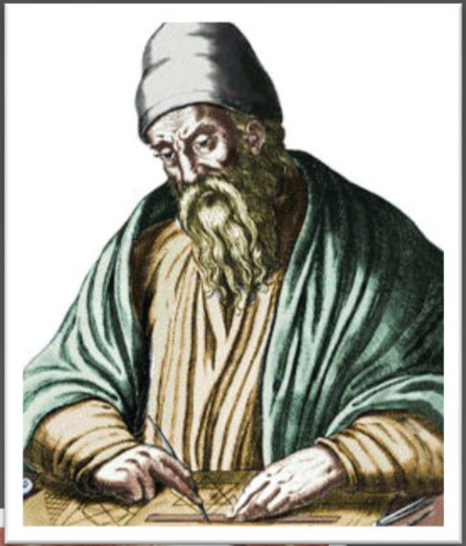
- Euclides, *Os Elementos*, século III a.C.
  - Conceito de sistema axiomático
    - Redução de sentenças intuitivamente verdadeiras reduzidas ao mínimo (axiomas ou postulados)
    - Redução de termos aceitos sem definição reduzidos ao mínimo (termos primitivos)
    - Todas as demais sentenças deveriam ser demonstradas a partir dos axiomas pela argumentação do geômetra
    - O mesmo vale para os termos
- Método inquestionado por 2000 anos!

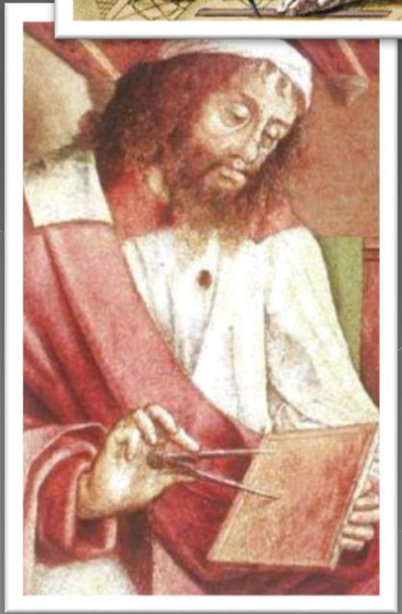




A.F. 3: Primeiras Soluções

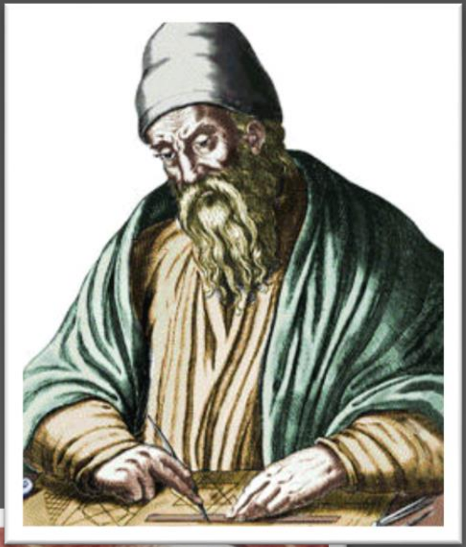
- Euclides, *Os Elementos*, século III a.C.
  - Conceito de sistema axiomático
    - Redução de sentenças intuitivamente verdadeiras reduzidas ao mínimo (axiomas ou postulados)
    - Redução de termos aceitos sem definição reduzidos ao mínimo (termos primitivos)
    - Todas as demais sentenças deveriam ser demonstradas a partir dos axiomas pela argumentação do geômetra
    - O mesmo vale para os termos
- Método inquestionado por 2000 anos!

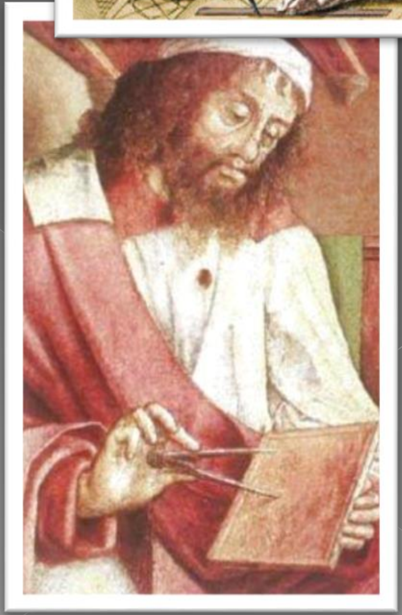




A.F. 3: Primeiras Soluções

- Euclides, *Os Elementos*, século III a.C.
  - Conceito de sistema axiomático
    - Redução de sentenças intuitivamente verdadeiras reduzidas ao mínimo (axiomas ou postulados)
    - Redução de termos aceitos sem definição reduzidos ao mínimo (termos primitivos)
    - Todas as demais sentenças deveriam ser demonstradas a partir dos axiomas pela argumentação do geômetra
    - O mesmo vale para os termos
- Método inquestionado por 2000 anos!





A.F. 4: Segundos Problemas

- Processo de argumentação informal
- Não havia um limite para a (forma de) argumentação
  - Muitas demonstrações se utilizavam de argumentos persuasivos
  - O importante é que o argumento fosse intuitivamente convincente

A.F. 4: Segundos Problemas

- Processo de argumentação informal
- Não havia um limite para a (forma de) argumentação
  - Muitas demonstrações se utilizavam de argumentos persuasivos
  - O importante é que o argumento fosse intuitivamente convincente

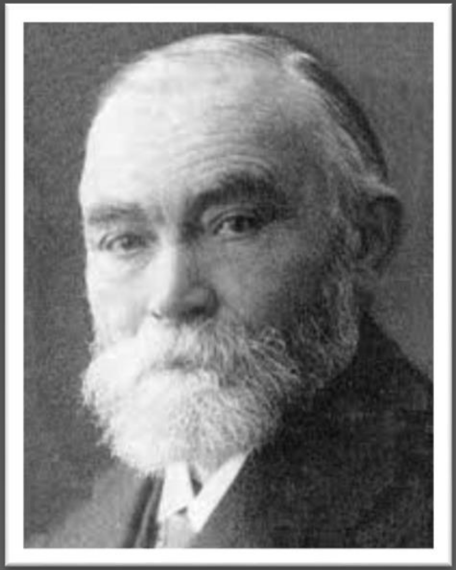
A.F. 4: Segundos Problemas

- Processo de argumentação informal
- Não havia um limite para a (forma de) argumentação
  - Muitas demonstrações se utilizavam de argumentos persuasivos
  - O importante é que o argumento fosse intuitivamente convincente

A.F. 4: Segundos Problemas

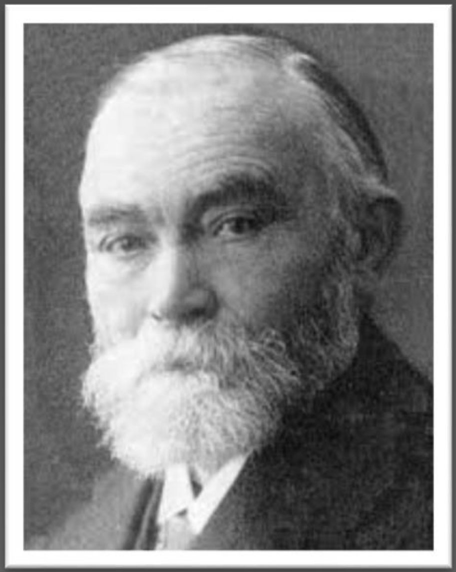
- Processo de argumentação informal
- Não havia um limite para a (forma de) argumentação
  - Muitas demonstrações se utilizavam de argumentos persuasivos
  - O importante é que o argumento fosse intuitivamente convincente

A.F. 5: Segundas Soluções



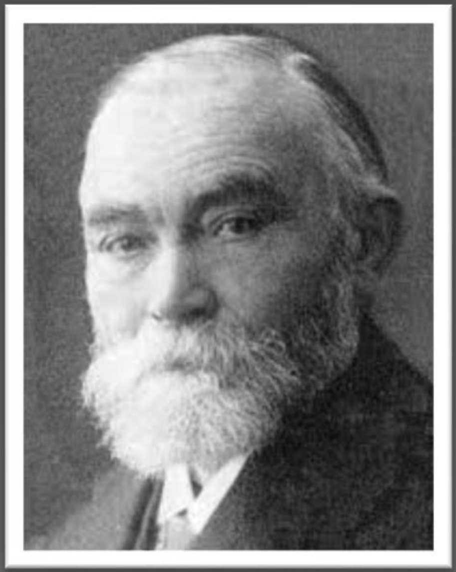
- Frege institui o conceito de *demonstração formal*
- Sistemas axiomáticos se tornaram *sistemas formais*
- Todas as demonstrações realizadas a partir de termos, proposições e regras de inferência primitivos
- Método utilizado até a atualidade nas ciências dedutivas.

A.F. 5: Segundas Soluções



- Frege institui o conceito de *demonstração formal*
- Sistemas axiomáticos se tornaram *sistemas formais*
- Todas as demonstrações realizadas a partir de termos, proposições e regras de inferência primitivos
- Método utilizado até a atualidade nas ciências dedutivas.

A.F. 5: Segundas Soluções

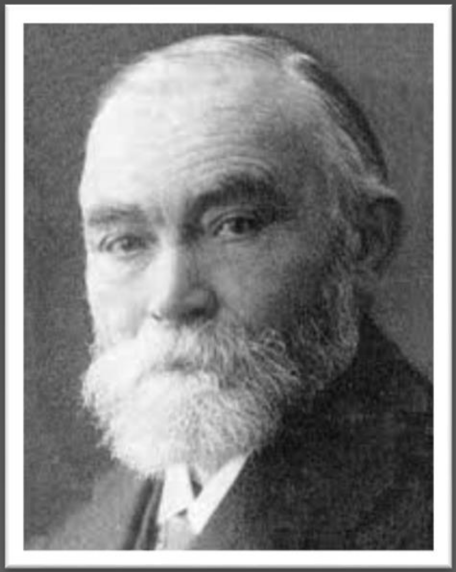


- Frege institui o conceito de *demonstração formal*
- Sistemas axiomáticos se

tornaram *sistemas formais*

- Todas as demonstrações realizadas a partir de termos, proposições e regras de inferência primitivos
- Método utilizado até a atualidade nas ciências dedutivas.

A.F. 5: Segundas Soluções



- Frege institui o conceito de *demonstração formal*
- Sistemas axiomáticos se tornaram *sistemas formais*
- Todas as demonstrações realizadas a partir de termos, proposições e regras de inferência primitivos
- Método utilizado até a atualidade nas ciências dedutivas.

A.F. 6: Composição de um Sistema Formal

- Para que um sistema Γ seja *formal*, ele deve ter:
  - 1. um alfabeto, que deverá conter todos os caracteres utilizados na linguagem a ser formalizada
  - 2. um conjunto de regras de formação, que permitirão decidir se uma sequência de caracteres da linguagem forma uma sentença delas
  - 3. um conjunto de axiomas, isto é, um conjunto de sentenças bem formadas aceitas (afirmadas) sem demonstração
  - 4. um conjunto de regras de transformação, que permitirão obter (derivar) novas sentenças a partir dos axiomas ou de sentenças já obtidas anteriormente

A.F. 6: Composição de um Sistema Formal

- Para que um sistema Γ seja *formal*, ele deve ter:
  - 1. um alfabeto, que deverá conter todos os caracteres utilizados na linguagem a ser formalizada
  - 2. um conjunto de regras de formação, que permitirão decidir se uma sequência de caracteres da linguagem forma uma sentença delas
  - 3. um conjunto de axiomas, isto é, um conjunto de sentenças bem formadas aceitas (afirmadas) sem demonstração
  - 4. um conjunto de regras de transformação, que permitirão obter (derivar) novas sentenças a partir dos axiomas ou de sentenças já obtidas anteriormente

A.F. 6: Composição de um Sistema Formal

- Para que um sistema Γ seja *formal*, ele deve ter:
  - 1. um alfabeto, que deverá conter todos os caracteres utilizados na linguagem a ser formalizada
  - 2. um conjunto de regras de formação, que permitirão decidir se uma sequência de caracteres da linguagem forma uma sentença delas
  - 3. um conjunto de axiomas, isto é, um conjunto de sentenças bem formadas aceitas (afirmadas) sem demonstração
  - 4. um conjunto de regras de transformação, que permitirão obter (derivar) novas sentenças a partir dos axiomas ou de sentenças já obtidas anteriormente

A.F. 6: Composição de um Sistema Formal

- Para que um sistema Γ seja *formal*, ele deve ter:
  - 1. um alfabeto, que deverá conter todos os caracteres utilizados na linguagem a ser formalizada
  - 2. um conjunto de regras de formação, que permitirão decidir se uma sequência de caracteres da linguagem forma uma sentença delas
  - 3. um conjunto de axiomas, isto é, um conjunto de sentenças bem formadas aceitas (afirmadas) sem demonstração
  - 4. um conjunto de regras de transformação, que permitirão obter (derivar) novas sentenças a partir dos axiomas ou de sentenças já obtidas anteriormente

Teoria dos Conjuntos (T.C.) 1: Notas Iniciais

- Uma das formulações axiomáticas da T.C. foi realizada por Zermelo em 1908, e, posteriormente, modificada por Fraenkel em 1922
  - Tópico de matemática avançada
- Há outros sistemas que envolvem coleções enormes (*classes*), como o Neumann-Gödel-Bernays

Obs.: *conjunto* é um termo primitivo

Teoria dos Conjuntos (T.C.) 1: Notas Iniciais

- Uma das formulações axiomáticas da T.C. foi realizada por Zermelo em 1908, e, posteriormente, modificada por Fraenkel em 1922
  - Tópico de matemática avançada
- Há outros sistemas que envolvem coleções enormes (*classes*), como o Neumann-Gödel-Bernays

Obs.: <u>*conjunto*</u> é um termo primitivo

Teoria dos Conjuntos (T.C.) 1: Notas Iniciais

- Uma das formulações axiomáticas da T.C. foi realizada por Zermelo em 1908, e, posteriormente, modificada por Fraenkel em 1922
  - Tópico de matemática avançada
- Há outros sistemas que envolvem coleções enormes (*classes*), como o Neumann-Gödel-Bernays

Obs.: conjunto é um termo primitivo

T.C. 2: Linguagem da T.C.

- A linguagem de T.C. conta com, além dos símbolos que viemos estudando no CQC, dos seguintes:

$$\in, \notin, =, \subset, \supset, \subsetneq, \supsetneq, \cup, \cap, -, \mathbf{C}, \times$$

  - E, talvez, de alguns outros

T.C. 3: Notas Sobre Notação

- Grupos de símbolos serão exclusivos de determinados entes da teoria
  - O predicado de ser o ente ficará, portanto, implícito no símbolo
- As letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z serão exclusivas para conjuntos
- As letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z serão exclusivas para elementos de conjuntos
- Em $x \in A$, a variável x será trabalhada livre

T.C. 3: Notas Sobre Notação

- Grupos de símbolos serão exclusivos de determinados entes da teoria
  - O predicado de ser o ente ficará, portanto, implícito no símbolo
- As letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z serão exclusivas para conjuntos
- As letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z serão exclusivas para elementos de conjuntos
- Em $x \in A$, a variável x será trabalhada livre

T.C. 3: Notas Sobre Notação

- Grupos de símbolos serão exclusivos de determinados entes da teoria
  - O predicado de ser o ente ficará, portanto, implícito no símbolo
- As letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z serão exclusivas para conjuntos
- As letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z serão exclusivas para elementos de conjuntos
- Em $x \in A$, a variável x será trabalhada livre

T.C. 3: Notas Sobre Notação

- Grupos de símbolos serão exclusivos de determinados entes da teoria
  - O predicado de ser o ente ficará, portanto, implícito no símbolo
- As letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z serão exclusivas para conjuntos
- As letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z serão exclusivas para elementos de conjuntos
- Em $x \in A$, a variável x será trabalhada livre

T.C. 4: Predicados dos Conjuntos

- A teoria dos conjuntos tem predicados "bem definidos":
  - $x \in X$: Relação (binária) de pertinência. Se dá entre elemento e conjunto
  - $=$ Relação de igualdade
  - $X \subset X$: Relação (binária) de inclusão. Se dá entre conjuntos
  - Há outras formas de escrever, como a notação para subconjunto próprio, etc.
  - T.C. conta, ainda, com alguns operadores

T.C. 4: Predicados dos Conjuntos

- A teoria dos conjuntos tem predicados "bem definidos":
  - $x \in X$: Relação (binária) de pertinência. Se dá entre elemento e conjunto
  - $=$ Relação de igualdade
  - $X \subset X$: Relação (binária) de inclusão. Se dá entre conjuntos
  - Há outras formas de escrever, como a notação para subconjunto próprio, etc.
  - T.C. conta, ainda, com alguns operadores

T.C. 4: Predicados dos Conjuntos

- A teoria dos conjuntos tem predicados "bem definidos":
  - $x \in X$: Relação (binária) de pertinência. Se dá entre elemento e conjunto
  - $=$ Relação de igualdade
  - $X \subset X$: Relação (binária) de inclusão. Se dá entre conjuntos
  - Há outras formas de escrever, como a notação para subconjunto próprio, etc.
  - T.C. conta, ainda, com alguns operadores

T.C. 4: Predicados dos Conjuntos

- A teoria dos conjuntos tem predicados "bem definidos":
  - $x \in X$: Relação (binária) de pertinência. Se dá entre elemento e conjunto
  - $=$ Relação de igualdade
  - $X \subset X$: Relação (binária) de inclusão. Se dá entre conjuntos
  - Há outras formas de escrever, como a notação para subconjunto próprio, etc.
  - T.C. conta, ainda, com alguns operadores

T.C. 4: Predicados dos Conjuntos

- A teoria dos conjuntos tem predicados "bem definidos":
  - $x \in X$: Relação (binária) de pertinência. Se dá entre elemento e conjunto
  - $=$ Relação de igualdade
  - $X \subset X$: Relação (binária) de inclusão. Se dá entre conjuntos
  - Há outras formas de escrever, como a notação para subconjunto próprio, etc.
  - T.C. conta, ainda, com alguns operadores

T.C. 4: Predicados dos Conjuntos

- A teoria dos conjuntos tem predicados "bem definidos":
  - $x \in X$: Relação (binária) de pertinência. Se dá entre elemento e conjunto
  - $=$ Relação de igualdade
  - $X \subset X$: Relação (binária) de inclusão. Se dá entre conjuntos
  - Há outras formas de escrever, como a notação para subconjunto próprio, etc.
  - T.C. conta, ainda, com alguns operadores

T.C. 4.1: Conceitos Básicos

- Notação: {a, b, c, ...}
- Conjunto vazio é aquele que não tem elementos
  - Notação: ∅ (definição adiante)

T.C. 4.1: Conceitos Básicos

- Notação: {a, b, c, ...}
- Conjunto vazio é aquele que não tem elementos
  - Notação: ∅ (definição adiante)

T.C. 5: Relação de Pertinência

- Se x é um dos elementos da lista a, b, c, ... em A = {a, b, c, ...}, então dizemos que x *pertence a A* e escrevemos $x \in A$
- Caso não encontremos x na lista, escrevemos $x \notin A$ e dizemos que x *não pertence a A*
- Conjunto vazio é aquele ao qual nenhum elemento pertence:

$$\forall x (x \notin \emptyset)$$

T.C. 5: Relação de Pertinência

- Se x é um dos elementos da lista a, b, c, ... em A = {a, b, c, ...}, então dizemos que *x pertence a A* e escrevemos $x \in A$
- Caso não encontremos x na lista, escrevemos $x \notin A$ e dizemos que *x não pertence a A*
- Conjunto vazio é aquele ao qual nenhum elemento pertence:

$$\forall x(x \notin \emptyset)$$

T.C. 5: Relação de Pertinência

- Se x é um dos elementos da lista a, b, c, ... em A = {a, b, c, ...}, então dizemos que <u>x *pertence a A*</u> e escrevemos $x \in A$
- Caso não encontremos x na lista, escrevemos $x \notin A$ e dizemos que <u>x *não pertence a A*</u>
- Conjunto vazio é aquele ao qual nenhum elemento pertence:

$$\forall x (x \notin \emptyset)$$

T.C. 6: Relação de Igualdade

- Dois conjuntos são iguais quando todos seus elementos pertencem a ambos. Em símbolos:

$$\forall X \forall Y (X = Y \Leftrightarrow (x \in X \leftrightarrow x \in Y))$$

Obs.: Em matemática, dois entes *são iguais* quando *são o mesmo* ente. Ou seja, 'igual' quer dizer o 'mesmo'.

T.C. 7.1: Relação de Inclusão

- Definimos a relação de inclusão da seguinte forma:

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \Rightarrow (x \in X \rightarrow x \in Y))$$

- Obs.: $X \subset Y \Leftrightarrow Y \supset X$

T.C. 7.1: Relação de Inclusão

- Definimos a relação de inclusão da seguinte forma:

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \Rightarrow (x \in X \rightarrow x \in Y))$$

- Obs.: $X \subset Y \Leftrightarrow Y \supset X$

T.C. 7.1: Relação de Inclusão

- Definimos a relação de inclusão da seguinte forma:

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \Rightarrow (x \in X \rightarrow x \in Y))$$

- Obs.: $X \subset Y \Leftrightarrow Y \supset X$

T.C. 7.2: Relação de Inclusão

- A relação de inclusão verifica as três seguintes propriedades:

  - Reflexividade: $\forall X(X \subset X)$
  - Antissimetricidade: $\forall X \forall Y((X \subset Y) \wedge (Y \subset X) \Leftrightarrow X = Y)$
  - Transitividade: $\forall X \forall Y \forall Z((X \subset Y) \wedge (Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z)$

- Um subconjunto é *próprio* quando está contido e não é igual: $A \subset B$ e $A \neq B$
  - Notação: $A \subsetneq B$

T.C. 7.2: Relação de Inclusão

- A relação de inclusão verifica as três seguintes propriedades:

  - Reflexividade: $\forall X (X \subset X)$
  - Antissimetricidade: $\forall X \forall Y ((X \subset Y) \wedge (Y \subset X) \Leftrightarrow X = Y)$
  - Transitividade: $\forall X \forall Y \forall Z ((X \subset Y) \wedge (Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z)$

- Um subconjunto é *próprio* quando está contido e não é igual: $A \subset B \text{ e } A \neq B$
  - Notação: $A \subsetneq B$

Dedução Natural na T.C. (D.N.) 1: Notas Iniciais

- Na essência, já conhecemos. Apenas algumas adaptações poderão ocorrer
- Para justificar a utilização de uma definição, use, por exemplo Def. $\subset$
- Para justificar propriedades, use uma abreviação.
- Chamaremos de *Determinação do Conjunto Vazio* (Det. $\emptyset$) a seguinte regra:

$$\forall X(x \notin X \Leftrightarrow X = \emptyset)$$

Exercícios em sala.

Dedução Natural na T.C. (D.N.) 1: Notas Iniciais

- Na essência, já conhecemos. Apenas algumas adaptações poderão ocorrer
- Para justificar a utilização de uma definição, use, por exemplo Def. $\subset$
- Para justificar propriedades, use uma abreviação.
- Chamaremos de *Determinação do Conjunto Vazio* (Det. $\emptyset$) a seguinte regra:

$$\forall X(x \notin X \Leftrightarrow X = \emptyset)$$

Exercícios em sala.

Dedução Natural na T.C. (D.N.) 1: Notas Iniciais

- Na essência, já conhecemos. Apenas algumas adaptações poderão ocorrer
- Para justificar a utilização de uma definição, use, por exemplo Def. $\subset$
- Para justificar propriedades, use uma abreviação.
- Chamaremos de *Determinação do Conjunto Vazio* (Det. $\emptyset$) a seguinte regra:

$$\forall X(x \notin X \Leftrightarrow X = \emptyset)$$

Exercícios em sala.

Dedução Natural na T.C. (D.N.) 1: Notas Iniciais

- Na essência, já conhecemos. Apenas algumas adaptações poderão ocorrer
- Para justificar a utilização de uma definição, use, por exemplo Def. ⊂
- Para justificar propriedades, use uma abreviação.
- Chamaremos de *Determinação do Conjunto Vazio* (Det. ∅) a seguinte regra:

$$\forall X(x \notin X \Leftrightarrow X = \emptyset)$$

Exercícios em sala.

D.N. 2: Primeiras Demonstrações

- Mostre as três propriedades da relação de inclusão:
  - Reflexividade
  - Antissimetricidade
  - Transitividade (Exercício)

Operações com Conjuntos (O.C.) 1: Uniões e Interseções

- União (ou reunião):
  - Notação: $A \cup B$ (Leia "A união B")
  - Definição:

$$\forall X \forall Y (x \in X \cup Y \Leftrightarrow (x \in X) \vee (x \in Y))$$

- Interseção:
  - Notação: $A \cap B$ (Leia "A inter B")
  - Definição

$$\forall X \forall Y (x \in X \cap Y \Leftrightarrow (x \in X) \wedge (x \in Y))$$

Exercícios em sala.

Operações com Conjuntos (O.C.) 1: Uniões e Interseções

- União (ou reunião):
  - Notação: $A \cup B$ (Leia “A união B”)
  - Definição:

$$\forall X \forall Y (x \in X \cup Y \Leftrightarrow (x \in X) \vee (x \in Y))$$

- Interseção:
  - Notação: $A \cap B$ (Leia “A inter B”)
  - Definição

$$\forall X \forall Y (x \in X \cap Y \Leftrightarrow (x \in X) \wedge (x \in Y))$$

Exercícios em sala.

O.C. 2.1: Diferença e Complementarismo

- Diferença:
  - Notação: $A - B$
  - Definição:

$$\forall X \forall Y (x \in X - Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y)$$

- Complementar:
  - Notação: $\complement_A B$
  - Tem a mesma definição da diferença

$$\forall X \forall Y (x \in \complement_X Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y)$$

Exercícios em sala.

O.C. 2.1: Diferença e Complementarismo

- Diferença:
  - Notação: $A - B$
  - Definição:

$$\forall X \forall Y (x \in X - Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y)$$

- Complementar:
  - Notação: $\complement_A B$
  - Tem a mesma definição da diferença

$$\forall X \forall Y (x \in \complement_X Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y)$$

Exercícios em sala.

O.C. 2.2: Diferença e Complementarismo

- Dada as definições, é válida a sentença

$$\forall X \forall Y (x \in X - Y \Leftrightarrow x \in \complement_X Y)$$

que, pela definição de igualdade de conjuntos, nos dá:

$$\forall X \forall Y (X - Y = \complement_X Y)$$

O.C. 3: Conjunto *U*

- Definiremos o conjunto *U* assim:

$$\forall x(x \in U)$$

Obs.: não podemos dizer que este é o _Conjunto Universo_, ou seja, o conjunto de todos os conjuntos possíveis

- Chamaremos de Determinação de *U* a seguinte regra de inferência:

$$\forall X(x \in X \leftrightarrow X = U)$$

- Temos, ainda, que

$$\forall X(x \in \complement X \Leftrightarrow x \notin X)$$

O.C. 3: Conjunto *U*

- Definiremos o conjunto *U* assim:

$$\forall x(x \in U)$$

Obs.: não podemos dizer que este é o *Conjunto Universo*, ou seja, o conjunto de todos os conjuntos possíveis

- Chamaremos de Determinação de *U* a seguinte regra de inferência:

$$\forall X(x \in X \leftrightarrow X = U)$$

- Temos, ainda, que

$$\forall X(x \in \complement X \Leftrightarrow x \notin X)$$

O.C. 3: Conjunto *U*

- Definiremos o conjunto *U* assim:

$$\forall x(x \in U)$$

Obs.: não podemos dizer que este é o *Conjunto Universo*, ou seja, o conjunto de todos os conjuntos possíveis

- Chamaremos de Determinação de *U* a seguinte regra de inferência:

$$\forall X(x \in X \leftrightarrow X = U)$$

- Temos, ainda, que

$$\forall X(x \in \complement X \Leftrightarrow x \notin X)$$

D.N. 3: Nova Regra: MD

MD (Mão Dupla)

	$\vdots$	
m	α_1	H / ? MD
	α_2	Regra/definição reversível
	α_3	Regra/definição reversível
	$\vdots$	$\vdots$
n	α_n	Regra/definição reversível
	$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_n$	MD, m-n

Algo como uma RPB

Exercícios em sala.

D.N. 4: Dedução Simplificada

- Fornece uma maneira mais pobre, menos formal, porém, mais usual em demonstrações diversas.
  - Menos pobre porque não é possível realizar deduções nela
  - Menos formal porque não há quantificações nas conclusões
  - Mais usual porque é ainda mais simples, intuitiva, e encurtece as demonstrações

Exercícios em sala.

D.N. 4: Dedução Simplificada

- Fornece uma maneira mais pobre, menos formal, porém, mais usual em demonstrações diversas.
  - Menos pobre porque não é possível realizar deduções nela
  - Menos formal porque não há quantificações nas conclusões
  - Mais usual porque é ainda mais simples, intuitiva, e encurtece as demonstrações

Exercícios em sala.

D.N. 4: Dedução Simplificada

- Fornece uma maneira mais pobre, menos formal, porém, mais usual em demonstrações diversas.
  - Menos pobre porque não é possível realizar deduções nela
  - Menos formal porque não há quantificações nas conclusões
  - Mais usual porque é ainda mais simples, intuitiva, e encurtece as demonstrações

Exercícios em sala.

D.N. 4: Dedução Simplificada

- Fornece uma maneira mais pobre, menos formal, porém, mais usual em demonstrações diversas.
  - Menos pobre porque não é possível realizar deduções nela
  - Menos formal porque não há quantificações nas conclusões
  - Mais usual porque é ainda mais simples, intuitiva, e encurtece as demonstrações

Exercícios em sala.

Álgebra Linear (A.L.): Definição de espaço Vetorial

Um conjunto V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, se:

- (A): $\forall v \forall w (v \in V \wedge w \in V \rightarrow v + w \in V)$
  - (A1): $v + w = w + v, \forall v \forall \mathrm{w} (v \in V \wedge w \in V)$
  - (A2): $(\mathrm{u} + v) + w = u + (v + w), \forall u \forall v \forall w (u \in V \wedge v \in V \wedge w \in V)$
  - (A3): $\exists 0 (0 \in V \wedge 0 + v = v), \forall v (v \in V)$
  - (A4): $\exists (-v) \big((-v) \in V \wedge v + (-v) = 0 \big), \forall v (v \in V)$
- (M): $\forall v \forall \alpha (v \in V \wedge \alpha \in \mathbb{K} \rightarrow \alpha v \in V)$
  - (M1): $(\alpha\beta).v = \alpha.(\beta v), \forall \alpha \forall \beta \forall v (\alpha \in \mathbb{K} \wedge \beta \in \mathbb{K} \wedge v \in V)$
  - (M2): $\exists 1 (1 \in \mathbb{K} \wedge 1.v = v), \forall v (v \in V)$
- (D): (A) e (M) se distribuem:
  - (D1): $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v, \quad \forall \alpha \forall u \forall v \, (\alpha \in \mathbb{K} \wedge u \in V \wedge v \in V)$
  - (D2): $(\alpha + \beta).v = \alpha.v + \beta.v, \quad \forall \alpha \forall \beta \forall v \, (\alpha \in \mathbb{K} \wedge \beta \in \mathbb{K} \wedge v \in V)$