Université d'Avignon
Algèbre 2

2020-2021
Licence 1 Mathématiques-Informatique

CC1 : 15 mars 2021 : 10h-11h30 (1h ; 1h20 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé. Barême indicatif : 5 points par exercice environ.

Exercice 1. *Calculer l'inverse de la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. *L'exercice est composé de trois questions indépendantes.*

1) Soit A une matrice réelle de taille n. Donner l'expression de sa trace en fonction de ses coefficients.

2) Soit P, Q, R, S quatre matrices réelles de taille n. Parmi les matrices $PRQS$, $SRPQ$, $SPRQ$, $SPQR$, $RSQP$, laquelle a-t-elle la même trace que $PQRS$?

3) Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille n et soit I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$? (justifier).

Exercice 3. *Soit a, b deux réels et A la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. *L'exercice est composé de deux questions indépendantes.*

1) Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille n et soit I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 - I_n = 0$. Montrer que la matrice A est inversible.

2) Soit A, B deux matrices réelles carré de taille n vérifiant $AB = A + I_n$. Montrer que la matrice A est inversible puis que $AB = BA$.

Exercice 5. *Soit a, b, c, d quatre nombre réels. On considère le système linéaire*

$$\begin{cases} x + az + a^2t = 1 \\ y + bz + b^2t = 0 \\ x + cz + c^2t = 1 \\ y + dz + d^2t = 0. \end{cases}$$

1) Calculer le rang du système en fonction des paramètres a, b, c, d (présenter les cas de manière précise).

2) Résoudre ce système dans le cas où la solution est unique.