Feuille 4 : Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Exercice 1. *Les applications suivantes sont-elles linéaires ?*

$$l_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,x) \end{array} \qquad l_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

$$l_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,x+1) \end{array} \qquad l_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,x+y) \end{array}$$

Exercice 2. *Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même définie par $f(e_1) = 3e_1+e_2+e_3+e_4$, $f(e_2) = e_1+e_2-e_3+e_4$, $f(e_3) = e_1-e_2+e_3-e_4$ et $f(e_4) = e_1+e_2-e_3+e_4$.*
1) Calculer $f(x,y,z,t)$ pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base.
3) Soit $F = \mathrm{Vect}(e_3,e_4)$. Les sous-espaces vectoriels F et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3. *Soit l'application linéaire*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0,x,z). \end{array}$$

a) Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$. Donner une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
b) La somme $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$ est-elle directe ?

Exercice 4. *1) Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(2x+y,x-y)$ est un isomorphisme (c-à-d linéaire bijective).*
2) Montrer que $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ est un isomorphisme si et seulement si $ad-bc \neq 0$.

Exercice 5. *Déterminer la matrice de l' application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x,y,z) = (x,y+z,0)$ relative à la base canonique.*

Exercice 6. *Soient f et h les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ représentées par les matrices respectives, dans les bases canoniques :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'image par f d'un vecteur (x,y,z) et l'image par h d'un vecteur (a,b).
2. Ecrire les matrices dans les bases canoniques des applications suivantes : $f \circ h$; $h \circ f$.

Exercice 7. *Montrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.*

Exercice 8. *Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient u_1,u_2,u_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par leurs composantes (dans la base canonique) : $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (2,3,1)$, $u_3 = (5,0,1)$.*
1) Montrer que $\mathcal{C} = (u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, ainsi que son inverse
3) Soit u le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$ dans la base (u_1,u_2,u_3). Quelles sont ses coordonnées dans la base (e_1,e_2,e_3) ?
4) Soit v le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$ dans la base (e_1,e_2,e_3). Quelles sont ses coordonnées dans la base (u_1,u_2,u_3) ?

Exercice 9. *1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire donnée dans les bases canoniques par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que les vecteurs $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, et $(-1,2,3)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique vers cette nouvelle base.
2) Montrer que $(1,1)$ et $(2,1)$ forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ puis écrire la matrice de passage de Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers cette nouvelle base.
3) Calculer la matrice B de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (utiliser la formule de changement de base).

Exercice 10. *Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(x,y,z) = (-2x + 5y - z, -2x + 2y + 2z, -2x + 5y - z).$$

1) Vérifier que f est linéaire et déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2) Montrer que $dim(Kerf) = 1$ et donner une base de $Ker(f)$.
3) Déterminer $dim(Imf)$ et donner une base de $Im(f)$. Donner également une équation cartésienne de $Im(f)$ (méthode du pivot).
4) Soit $v_2 = (1,1,1)$ et $v_3 = (1,0,1)$. Calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$ et en déduire que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 11. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

Soit

$$u_1 = (2,-1,-2)\ ;\ u_2 = (1,0,-1)\ ;\ u_3 = (-2,1,3).$$

1) Montrer que $\mathcal{B}' := \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ (utiliser les formules du cours !)

Exercice 12. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f représenté dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ par la matrice*

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $f(e_1 + 2e_2)$ et trouver un élément non nul de $Ker(f)$.
2) Déterminer $dim(Kerf)$, $rg(f)$, une base $\mathcal{B}'$ de $Ker(f)$, et une base $\mathcal{B}''$ de $Im(f)$.
3) Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice D de f dans $\mathcal{B}$
4) Donner la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathcal{B}$, puis donner une relation entre les trois matrices A, D, et P.

Exercice 13. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\{e_1, e_2\}$ est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $f_1 = (1,-4)$ et $f_2 = (1,-1)$. Montrer que $\{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice de changement de base P de $\{e_1, e_2\}$ à $\{f_1, f_2\}$, puis P^{-1}, puis $P^{-1}AP$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. *Soit* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* $a_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $a_2 = e_1 - e_2 + e_3$, $e_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. *Montrer que* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est*

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice de f *dans la base* $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Exercice 15. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

Donner une base et la dimension de $Ker(f)$. *Même chose pour* $Im(f)$

Exercice 16. *Soit* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *et* $\{f_1, f_2, f_3\}$ *les bases canoniques de* $\mathbb{R}^4$ *et* $\mathbb{R}^3$ *respectivement. Soit* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3 \ ; \ f(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3 \ ; \ f(e_3) = 3f_1 - f_3 \ ; \ f(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3$$

Donner l'image par f *d'un vecteur* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *et la matrice de* f *dans les deux bases* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *et* $\{f_1, f_2, f_3\}$. *Déterminer une base et la dimension de* $Ker(f)$. *Même question pour l'image.*

Exercice 17. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. *Montrer que* $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ *si et seulement si* $Ker(f) = Ker(f \circ f)$.

Exercice 18. *(plus difficile / hors programme) Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *une application linéaire non nulle telle que* $f^2 = 0$ *(c.a.d. pour tout* $x \in \mathbb{R}^3$, *on a* $f(f(x)) = 0$*). Montrer que* $Im(f) \subset Ker(f)$ *puis que* $\mathrm{rg}(f) = 1$ *et* $\dim(Ker f) = 2$. *En déduire qu'il existe une base de* $\mathbb{R}^3$ *telle que la matrice de* f *dans cette base soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 19. *(Plus difficile / hors programme). Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *une application linéaire telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \exists \alpha_x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \alpha_x x. \tag{0.1}$$

1) Soit x, y *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $\{x, y\}$ *est libre. Montrer que* $\alpha_{x+y}(x+y) = \alpha_x x + \alpha_y y$. *En déduire que* $\alpha_{x+y} = \alpha_x = \alpha_y$ *puis que* $f(x) = \alpha_x x$ *et* $f(y) = \alpha_x y$.
2) Soit x, y *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $\{x, y\}$ *est liée. Démontrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $y = \lambda x$. *En déduire que* $f(y) = \alpha_x y$.
3) Grâce aux questions 1) et 2), démontrer que (0.1) *implique*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}^n, \ f(y) = \alpha y.$$