Feuille 5 : Déterminants

Exercice 1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A n'est pas inversible et que B est inversible (utiliser le déterminant).

Correction : une matrice carré est inversible si et seulement si son déterminant est non nul (résultat de cours). Pour A, on développe par rapport à la 2ème colonne (on fait aussi $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ pour créer un zéro supplémentaire)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times 1 \times (0-4) - 2(2 \times 4 - 1 \times 6) = 4 - 4 = 0.$$

Pour B : on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ de façon à créer des zéros puis ensuite $C_1 \leftarrow C_1 + C_4$ et $C_2 \leftarrow C_2 + C_4$ de façon à créer d'autres zéros :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{=3-9-6-6} - \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{=4-6-4-8} = -22$$

en développant les 2 derniers déterminants par la règle de Sarrus.

Exercice 2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer le rang de A en fonction de a.*

solution : par la règle de Sarrus, on trouve que $det(A) = -a^3 + 3a - 2 = -(a^3 - 3a + 2) = -(a-1)^2(a+2)$. Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $rg(A) = 3$. Si $a = 1$, on vérifie que $rg(A) = 1$ (3 fois la même ligne) ; si $a = -2$, on vérifie que $rg(A) = 2$ (2 lignes linéairement indépendantes).

Exercice 3. *1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle qui s'écrit $A = XY^T$ où X est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ et Y^T un vecteur ligne (transposé de Y).*
a) Ecrire une telle matrice lorsque $n = 2$. Montrer que les 2 colonnes de A sont proportionnelles.
b) Dans le cas général (dimension n), écrire pareillement la matrice A et montrer qu'une telle matrice est de rang 1.

2) Soit A une matrice de rang 1. On écrit A en colonnes i.e. $A = [C_1 \cdots C_n]$.
a) Montrer qu'il existe un vecteur colonne X de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $1 \le j \le n$ il existe $y_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = y_j X$.
b) Déduire que $A = XY^T$ où $Y^T = (y_1, ..., y_n)$.

<u>solution</u> : 1) a) Pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix}$. Soit C_1 et C_2 les deux colonnes de A. On a donc $C_1 = y_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $C_2 = y_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Si $y_1 = y_2 = 0$ alors A est nulle. Ce n'est pas possible. Supposons par exemple y_1 non nul. Alors $C_1 = (y_2/y_1)C_2$. D'où le résultat.
b) Chaque colonne C_j de A s'écrit $C_j = y_j(x_1, ..., x_n)^T$. Donc, toutes les colonnes sont proportionnelles (elles sont colinéaires à X). Donc, le rang de A est 1 (A étant non nulle).
2) a) Comme A est de rang 1, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les n colonnes de A est de dimension 1 (il s'agit de l'image A vu comme endomorphisme). Ainsi il existe X un vecteur colonne non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que $Vect(C_1, ..., C_n) = \mathbb{R}X$. En particulier, pour chaque $1 \le j \le n$, $C_j \in \mathbb{R}X$ et donc il existe $y_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = y_j X$.
b) On conclut que $A = [C_1 \cdots C_n] = [y_1 X \cdots y_n X] = XY^T$ comme voulu.

Exercice 4. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

vérifie $det(A) = a^4 - b^4$. Déterminer ensuite le rang de A en fonction de a et b.

<u>solution</u> : On développe par rapport à la première ligne ce qui donne : $det(A) = a \times a^3 - b \times b^3$ (les deux sous matrices résultant étant respectivement triangulaires inférieure, resp. triangulaire supérieure). D'où le résultat.
Pour étudier le rang de A en fonction de a et b, on regarder si le déterminant est nul ou pas (i.e. est-ce que la matrice A est inversible ?).
(i). Si $a^2 - b^2 \neq 0$ et $a^2 + b^2 \neq 0$, alors $rg(A) = 4$ (car $det(A) \neq 0$).
(ii). Si $a^2 + b^2 = 0$, alors $A = 0$ et $rg(A) = 0$.
(iii). Si $a^2 - b^2 = 0$ et $a^2 + b^2 \neq 0$, alors on vérifie que $rg(A) = 3$ (car si $a = b$, resp. $a = -b$, on a $L_1 = L_2 - L_3 + L_4$, resp. $-L_1 = L_2 + L_3 + L_4$ et $\{L_2, L_3, L_4\}$ est libre).

Exercice 5. *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

<u>Correction</u> : on appelle δ_i la valeur des 4 déterminants, $i = 1, 2, 3, 4$.
- Pour δ_1, on développe par rapport à la première colonne (par exemple) :

$$\delta_1 = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 2 + 3(-7) = -18$$

- pour δ_2, développement par rapport à la 1ère ligne :

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

- pour δ_3 : développement par rapport à la 1ère colonne (par exemple) :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a(a^2 - bc) - c(ab - c^2) + b(b^2 - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

- pour δ_4 : on fait les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ (ceci ne change pas le déterminant) ce qui donne la deuxième matrice ci-dessous avec 3 zéros dans la 3ème colonne. D'où en développant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3}(-2)\left(1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = -2(-1+7) = -12$$

Exercice 6. *1) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices non nulles telles que $AB = 0$. Montrer que $det(A) = det(B) = 0$.*
2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que n est pair. Donner un exemple d'une telle matrice pour $n = 2$.
3) Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ une matrice anti-symétrique. Montrer que $det(A) = 0$.
4) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible ?

solution : 1) en prenant le déterminant on trouve $det(A)det(B) = 0$. Supposons par exemple $det(A) = 0$. Si $det(B) \neq 0$. Alors B est inversible et donc $ABB^{-1} = A = 0$ et donc $A = 0$ ce qui est absurde. Donc, $det(B) = 0$. On raisonne de la même manière si $det(B) = 0$. On déduit donc le résultat.
2) En prenant le déterminant $det(A)^2 = (-1)^n \geq 0$ donc n est pair.
3) Utiliser que $det(A^T) = det(A)$, d'où le résultat ($2n+1$ impair).
4) On calcule le déterminant de $A - \lambda I_2$ ce qui donne le trinôme $\lambda^2 - 11\lambda + 24$. Ainsi, $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible ssi $\lambda = 3$ ou $\lambda = 8$.

Exercice 7. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer judicieusement les déterminants suivants. Pour chacun d'eux, donner une condition nécessaire et suffisante simple, portant sur a, b, c, pour qu'il soit nul.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Indication pour le dernier déterminant : utiliser la linéarité par rapport aux colonnes de la matrice pour se ramener au deuxième déterminant.

correction : En faisant $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ (ceci ne change pas le déterminant), on trouve :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c & a-b & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(a-c)-(a-b)(c-a) = 0$$

Par les 2 mêmes opérations :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} &= (b-a)(c^2-a^2)-(b^2-a^2)(c-a) \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

et ce déterminant vaut 0 si et seulement si $a=b$ ou $a=c$ ou $b=c$.
Par les 2 mêmes opérations que ci-dessus,

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a \end{vmatrix} = a((b-a)(c-a)-(b-a)^2) = a(b-a)(c-b)$$

et ce déterminant vaut 0 si et seulement si $a=0$ ou $a=b$ ou $b=c$.

On suit l'indication et on utilise la linéarité par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Pour le 1er déterminant on obtient en développant par rapport à la 2ème et 3ème colonne 4 déterminants dont 3 ont deux colonnes identiques, du coup, en notant δ_2 le 2ème déterminant de l'exercice, on a

$$\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\delta_2$$

et de même (3 déterminants sur les 4 sont nuls)

$$\begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\delta_2$$

(on utilise que le déterminant est inchangé si on échange successivement les colonnes 1 et 3 puis les colonnes 2 et 3 dans la 2ème égalité ci-dessus). Ainsi :

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc\delta_2 = 2abc(c-a)(c-b)(b-a).$$

Ce déterminant est zéro ssi $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$ ou $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

Exercice 8. *Calculer le déterminant d'ordre n suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(il y a des 1 sur la diagonale, première ligne et première colonne).

solution : pour $n = 1$, $\Delta_1 = 1$; pour $n = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Pour $n = 3$, on développe par rapport à la 3ème colonne

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \Delta_2 = -1$$

Pour tout $n \geq 3$, on applique la même technique : on développe par rapport à la dernière colonne (2 coefficients non nuls seulement). On trouve

$$\Delta_n = (-1)^{n+1} a_{n-1} + \Delta_{n-1}$$

avec a_n un déterminant d'ordre $n-1$ défini par

$$a_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On redéveloppe ce déterminant par rapport à la dernière ligne : $a_{n-1} = (-1)^{n-1+1} \times 1$ (il ne reste plus qu'une matrice de taille $n-2$ avec des 1 sur la diagonale). D'où $a_{n-1} = (-1)^n$. Ainsi $\Delta_n = -1 + \Delta_{n-1}$, $n \geq 4$. Il s'agit d'une suite arithmétique : $n \geq 3 \Rightarrow \Delta_n = -(n-2)$.

Exercice 9. *On se donne $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels ou complexes. Calculer le déterminant suivant, dit "de Vandermonde".*

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

<u>solution</u> : c'est l'exercice classique dont je reprends la démonstration classique (il est préférable de se douter du résultat à savoir que ce déterminant est nul si et seulement si il existe $i \neq j$ t.q. $a_i = a_j$). On raisonne par réccurence pour $n \geq 2$ avec $V(a_1, a_2) = a_2 - a_1$. Soit la fonction polynomiale de degré $n-1$:

$$P(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_{n-1})$$

qui s'annulle pour $x = a_i$, $i = 1, ..., n-1$. On l'écrit :

$$P(x) = x^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} b_j x^j.$$

On a donc $a_i^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} b_j a_i^j = 0$ pour $i = 1, ..., n-1$. Pour calculer $V(a_1,\dots,a_n)$, on fait les opérations qui ne changent pas le déterminant : $C_n \to C_n + b_1 C_1 + b_2 C_2 + \cdots + b_{n-1} C_{n-1}$. Par définition de P, les coefficients de la dernière colonne sont nuls sauf le dernier :

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & P(a_n) \end{vmatrix}.$$

D'où $V(a_1,\dots,a_n) = P(a_n)V(a_1,...,a_{n-1}) = (a_n - a_1)\cdots(a_n - a_{n-1})V(a_1,...,a_{n-1})$. On déduit le résultat par réccurence.

Exercice 10. *Soient $a \neq b$ deux réels. Montrer par récurrence sur n que*

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

<u>correction</u> : on appelle u_n le déterminant en question pour $n \geq 1$. On trouve facilement que $u_1 = a + b$, $u_2 = (a+b)^2 - ab$. On obtient maintenant une relation de récurrence en développant :
1) On développe par rapport à la première ligne le déterminant n'ordre $n+2$. On obtient

$$u_{n+2} = (a+b)u_{n+1} - ab\tilde{u}_{n+1}$$

avec

$$\tilde{u}_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Quand on redéveloppe $\tilde{u}_{n+1}$ par rapport à la 1ère colonne on trouve $\tilde{u}_{n+1} = u_n$. D'où

$$u_{n+2} = (a+b)u_{n+1} - abu_n.$$

Par réccurence, on obtient le résultat. En effet, le résultat est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n+1$. Alors

$$u_{n+2} = (a+b)\frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b} - ab\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{(a+b)(a^{n+2} - b^{n+2}) - ab(a^{n+1} - b^{n+1})}{a-b} = \frac{a^{n+3} - b^{n+3}}{a-b}$$

et on conclut par réccurence.

Exercice 11. *(révision) Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On appelle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est la matrice A.
1) Déterminer toutes les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ et les vecteurs colonnes $x \in \mathbb{R}^2$ non nuls tels que $f(x) = \lambda x$.
2) Déduire de 1) une base de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.
3) Calculer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Inverser P.
3) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

correction : 1) On écrit le système $f(x) = \lambda x$ matricielement : $AX = \lambda X$. Donc :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ -x_1 + 4x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

On cherche une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que ce système admette une autre solution que $x = 0$. On applique la méthode du pivot de Gauss au système que l'on ré-écrit :

$$\begin{cases} -x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \\ (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} -x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \\ [\lambda^2 - 5\lambda + 6]x_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi les deux valeurs de λ cherchées sont $\lambda = 2, 3$. Pour $\lambda = 2$, l'ensemble des solutions de ce système est $\mathbb{R}(2,1)$ et pour $\lambda = 3$, $\mathbb{R}(1,1)$.
2) Soit $u = (2,1)$ et $v = (1,1)$. Alors la famille $\mathcal{B}' = \{u, v\}$ est clairement une base de $\mathbb{R}^2$ (u et v ne sont pas colinéaires). Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Si on appelle f

l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui a pour matrice A dans la base canonique, alors, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ (appelée B) s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) On a en calculant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $B = P^{-1}AP$. D'où

$$A = PBP^{-1} \; \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

(déjà vu, voir feuille d'exercice sur les matrices). On trouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 23^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 23^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. *(Cet exercice dépasse largement le cadre du cours d'algèbre 2).*
Soit A, B deux matrices réelles telles que $AB = BA$. Montrer que $det(A^2 + B^2) \geq 0$. Avez vous un contre-exemple si A et B ne commutent pas ?

solution : $det(A^2 + B^2) = det((A + iB)(A - iB)) = det(A + iB)det(A - iB) \geq 0$ (car de la forme $z\bar{z} = |z|^2$ avec $z \in \mathbb{C}$).

Exercice 13. *Retour sur les matrices de rang 1.*
1) On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ vérifie

$$A^2 - Tr(A)A + det(A)I_2 = 0.$$

En déduire qu'une matrice de rang 1 vérifie $A^2 = Tr(A)A$.
2) [question plus difficile[1]] On se place dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice de rang 1. On admet[2] qu'il existe $X, Y \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ tels que $A = XY^T$. Montrer que $A^2 = (Y^TX)A$. En déduire que

$$A^2 = Tr(A)A.$$

3) [question plus difficile]. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que

$$det(A + I_n) = 1 + Tr(A)$$

(indication : former une base de $\mathbb{R}^n$ constituée du noyau[3] de A et d'un supplémentaire du noyau).

1. On rappelle qu'étant donné deux vecteurs colonnes X, Y, le produit $XY^T = (x_iy_j)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est bien posé : il s'agit du produit d'un vecteur colonne et d'un vecteur ligne formant ainsi une matrice (n, n). On rappelle que le produit $X^TY = \sum_{i=1}^n x_iy_i \in \mathbb{R}$ est bien posé : il s'agit d'un produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne formant ainsi un scalaire (produit scalaire).
2. Voir exercice 6.
3. Noyau de l'endormorphisme canoniquement associé à A.

solution : 1) vérifier par le calcul directement (calcul standard).
2) $A^2 = X \underbrace{(Y^T X)}_{=\alpha \in \mathbb{R}} Y^T = \alpha X Y^T$ où $\alpha = Y^T X$. De plus,

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (XY^T)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = Y^T X$$

d'où $A^2 = Tr(A)A$.
3) Soit f l'endormorphisme canoniquement associé à A. Par le théorème du rang $rg(f) + dim(Ker(f)) = n$ d'où $dim(Ker(f)) = 1$ (car $rg(f) = rg(A) = 1$). Soit une base de $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{B} := \{u_1, ..., u_n\}$ formée de la manière suivante : $\{u_1, ..., u_{n-1}\}$ est une base de $Ker(f)$ et $u_n \notin Ker(f)$ est tel que $Vect(u_n)$ est un supplémentaire de $Ker(f)$. Dans cette base, la matrice de f est constituée de $n-1$ colonnes nulles (car $f(u_j) = 0$ pour $j = 1, ..., n-1$) et d'une dernière colonne $C \in \mathbb{R}^n$ non nulle :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = [0 \cdots 0 \, C].$$

Il faut noter que le dernier coefficient de C (d'ordre n) vaut exactement la trace de A. Il existe donc une matrice de passage $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible (de la base canonique à la base $\mathcal{B}$) telle que

$$P^{-1}AP = [0 \cdots 0 \, C].$$

D'où $P^{-1}(A + I_n)P$ est triangulaire supérieur avec des 1 sur la diagonale (sauf le dernier coefficient diagonal) :

$$P^{-1}(A + I_n)P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 + Tr(A) \end{pmatrix}$$

On déduit le résultat en prenant le déterminant.

Exercice 14. *(Cet exercice dépasse largement le cadre du cours d'algèbre 2).*
Soit p un nombre premier et A une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui vérifie $A^2 = pA$. Montrer que sa trace est congru à 0 modulo p. (Indication : calculer les valeurs propres de la matrice A ; utiliser que A est trigonalisable ; calculer la trace de A).