Chapitre 6: introduction à la diagonalisation

(si le temps le permet)

Térence Bayen

Algèbre 2
L1S2 MI/MP
Avril 2021

Introduction

Dans tout le chapitre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. L'objectif est de trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale. Dans ce cas, on dit que f est diagonalisable.
De manière similaire, on dira qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si son endomorphisme canoniquement associé

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & Ax \end{array}$$

est diagonalisable. Cela signifie qu'il existe une matrice inversible P telle que $D := P^{-1}AP$ est diagonale. Diagonaliser A, c'est déterminer ces matrices P et D. La factorisation $A = PDP^{-1}$ permet de simplifier bon nombre de calculs et raisonnements.

Eléments propres d'un endomorphisme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$, tel que $Ax = \lambda x$. Un tel x est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Proposition

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ \lambda & \mapsto & P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) \end{array}$$

est un polynôme de degré n. On l'appelle polynôme caractéristique de A.

Proposition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de A si et seulement si $P_A(\lambda) = 0$.

Définition

Soit λ une valeur propre de A. On appelle sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ l'ensemble

$$E_A(\lambda) = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ t.q. } Ax = \lambda x\}.$$

Notons que, si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a $E_A(\lambda) = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n})$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Les vecteurs propres associés à la valeur propre λ sont les éléments non nuls de $E_A(\lambda)$.

Diagonalisation

Proposition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ telle que chaque e_i est un vecteur propre associé à une valeur propre λ_i de A. Dans ce cas, l'endomorphisme f canoniquement associé à A admet pour matrice

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Remarque

1. *Les λ_i ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.*
2. *Si $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, on a*

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{-1} A P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Proposition

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Corollaire

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *admet* n *valeurs propres distinctes alors* A *est diagonalisable.*

Caractérisation des matrices diagonalisables

Commençons par quelques compléments sur les polynômes.

Définition

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $P(\lambda) = 0$ on dit que λ est une racine de P. Si $P(\lambda) = P'(\lambda) = ... = P^{(k-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(k)}(\lambda) \neq 0$ on dit que λ est une racine d'ordre de multiplicité k de P.

Proposition

Si P est un polynôme de degré n, la somme des ordres de multiplicité des racines de P est toujours inférieur ou égal à n.

Définition

Un polynôme de degré n est dit scindé si la somme des ordres de multiplicité de ses racines est égal à n.

Pour dire si un polynôme est scindé il est important de préciser si ses racines sont recherchées sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Evidemment, il est plus facile pour un polynôme d'être scindé sur $\mathbb{C}$ que sur $\mathbb{R}$.

Théorème (D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme à coefficients sur $\mathbb{C}$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

On peut maintenant énoncer une caractérisation classique des matrices diagonalisables.

Théorème

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et, pour chaque valeur propre λ_i, la dimension du sous-espace propre associé à λ_i est égale à l'ordre de multiplicité de λ_i en tant que racine du polynôme caractéristique.

On a donc tout intérêt à chercher à diagonaliser A sur $\mathbb{C}$, même si A est à coefficients réels. Un cas particulier important est le suivant.

Théorème

Si A est symétrique réelle, alors A est diagonalisable à l'aide de valeurs et vecteurs propres réels.

Un exemple d'application : puissance de matrices

Proposition

Si $A = PDP^{-1}$ *avec* $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *on a* $A^k = PD^kP^{-1}$ *avec* $D^k = diag(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)$.