Université d'Avignon 2022-2023
Algèbre 2 Licence 1 : MI-MP

CC1 : 13 mars 2023 : 10h-11h (11h20 pour les tiers temps)
On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé.

Exercice 1. [4 points]. *Résoudre le système suivant (et donner son rang) :*

$$\begin{cases} x-y+2z+t &= 0 \\ 2x-y+z-t &= 0 \\ -x+y+z-t &= 0 \\ 2x-y+4z-t &= 0 \end{cases}$$

correction : Par la méthode du pivot on trouve $z=0$ et $y=3t$. La solution du système est donc $\mathcal{S}=\{(2t,3t,0,t)\ ;\ t\in\mathbb{R}\}$ et le rang vaut $3=4-1$.

Exercice 2. [4 points] *Soit la matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) [1 point]. *Calculer le rang de A.*
2) [1 point]. *Que vaut A^2 ?*
3) [2 points]. *Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, exprimer A^k en fonction de A et de k (justifier l'expression obtenue).*

correction : 1) Le système linéaire homogène associé à la matrice A s'écrit $x+z=0$ et a pour solution $\mathcal{S}=\{(-z,y,z)\ ;\ y,z\in\mathbb{R}\}$, donc le rang de A est $1=3-2$.
2) On trouve $A^2=2A$.
3) Par réccurence (et en utilisant 2)) on montre que $A^k=2^{k-1}A$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 3. [5 points] *Soit $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ telles que AB-BA=A. On note* Tr *l'opérateur trace.*
1) [2 point]. *Que vaut* $\mathrm{Tr}(A)$ *? (justifier).*
2) [2 points] *Montrer que pour tout entier $k\geq 1$, on a* $\mathrm{Tr}(A^k)=0$.
3) [1 point]. *On suppose maintenant que $AB-BA=A^2$. Que vaut* $\mathrm{Tr}(A^k)=0$ *pour $k\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$?*

correction : 1) En utilisant que $Tr(AB)=Tr(BA)$ on a donc $Tr(A)=0$.
2) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. En multipliant $AB-BA=A$ par A^{k-1} à gauche, on a $Tr(A^k)=Tr(A^kB-A^{k-1}BA)=Tr(A^kB)-Tr(A^{k-1}BA)=Tr(A^kB)-Tr(BA^k)=Tr(A^kB)-Tr(A^kB)=0$.
3) On a $BA-AB=A^2$ et donc par un calcul analogue en multipliant à gauche par A^{k-2} on obtient $\mathrm{Tr}(A^k)=0$ pour tout entier $k\geq 2$.

Exercice 4. [5 points] *Soit I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et soit*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) [1 point]. *Montrer que $(A+I_3)^3=A^3+3A^2+3A+I_3$.*
2) [2 points]. *Que vaut $(A+I_3)^3$?*
2) [2 points]. *En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_3, A, et A^2.*

correction : 1) I_3 commute avec A, d'où le résultat par le binôme de Newton.
2) On trouve $(A+I_3)^3 = 0$.
3) Il vient donc $A(-A^2-3A-3I_3) = I_3$ ainsi A^{-1} existe et $A^{-1} = -A^2-3A-3I_3$.

Exercice 5 (4 points). *Soit $m \in \mathbb{R}$ et le système linéaire*

$$\left\{\begin{array}{ll} x+my+mz & =1 \\ mx+y+mz & =1 \\ mx+my+z & =m^2 \end{array}\right.$$

1) [2 points] *Résoudre le système pour $m=1$ et donner son rang.*
2) [2 points] *On suppose $m \neq 1$. Lorsque c'est possible, résoudre le système et indiquer son rang.*

correction : 1) Pour $m=1$, le système s'écrit $x+y+z=1$ dont la solution est $\{(1-y-z,y,z)\ ;\ y,z\in\mathbb{R}\}$. Ainsi le système est de rang 1.
2) Supposons $m \neq 1$. Par la méthode du pivot de Gauss, le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{ll} x+my+mz & =1 \\ (1-m^2)y+m(1-m)z & =0 \\ m(1-m)y+(1-m^2)z & =m(m-1) \end{array}\right. ;\ \left\{\begin{array}{ll} x+my+mz & =1 \\ (1+m)y+mz & =0 \\ my+(1+m)z & =-m \end{array}\right. ;\ \left\{\begin{array}{ll} x+my+mz & =1 \\ (1+m)y+mz & =0 \\ (2m+1)z & =-m(m+1) \end{array}\right.$$

le dernier système étant obtenu en multipliant par m la 2ème et par $(1+m)$ la 3ème ligne de l'avant dernier système. Par conséquent, si $m=-1/2$, le système est incompatible. Si $m\neq -1/2$, alors on trouve facilement une seule et unique solution

$$x = \frac{(m+1)^2}{2m+1}\ ;\ y = \frac{m^2}{2m+1}\ ;\ z = -\frac{m(m+1)}{2m+1}$$

et donc le système est de rang 3.