Epreuve de contrôle continu n°3

durée : 1h - documents et calculatrices interdits

Justifier vos réponses en détaillant les calculs effectués

Exercice 1. (3 points)
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x-y \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2,y^2) \end{array}$$

Exercice 2. (5 points)
Soit l'application linéaire

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, x+z, y+z, 0). \end{array}$$

1) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. Donner une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
2) Donner la matrice de f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. (6 points)
Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C = (a_1, a_2, a_3)$ la famille constituée des vecteurs

$$a_1 = (1,2,1),\ a_2 = (0,1,1),\ a_3 = (-2,0,1).$$

1) Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner la matrice de passage de B à C ainsi que la matrice de passage de C à B.
3) Soit u le vecteur de coordonnés $(1,-1,0)$ dans la base C. En utilisant la question précédente, donner les coordonnées de u dans la base B.

Exercice 4. (6 points)
Calculer judicieusement les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que d_2 soit nul.