Feuille 2 - Matrices

Certains exercices ou avec * sont plus difficiles. Si cela n'est pas précisé, les matrices sont à coefficients réels. L'espace des matrices rectangulaires à coefficients réels de taille m, n sera noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ou aussi $\mathbb{R}^{m\times n}$. Lorsque $m = n$, cet espace sera noté $M_n(\mathbb{R})$. On notera souvent I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. La notation $A^\top$ ou A^T désigne la transposée de la matrice A.

Exercice 1 *1) Soit A une matrice de taille (m, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$ et B une matrice de taille (p, q) à coefficients dans $\mathbb{R}$. Quand le produit de A et B est bien défini, écrire le coefficient générique de la matrice AB.*
2) Soit A, B, C trois matrices réelles carrés de taille n telles que $B \neq C$. A-t-on $AB = AC \Rightarrow B = C$?

Exercice 2 *Dans les cas suivants, calculer AB et BA si cela est possible.*
a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Calculer le produit ABC où*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 *1) Soit G le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{R})$ formé des matrices $A := \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que G est stable, c.a.d. que pour tout couple $A, B \in G$, alors $AB \in G$.*
2) Même question avec les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a > 0$ est fixé. A-t-on aussi la propriété de stabilité par passage à l'inverse ?

Exercice 5 *Soit A, B deux matrices carrés t.q. $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent i.e. $AB = BA$ (Indication : introduire $(I_n - A)(I_n - B)$).*

Exercice 6 *1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Existe-t-il deux matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que $AB - BA = x \times I_n$ où I_n désigne la matrice identité.*
2) Si A et B sont deux matrices de taille 2, est-ce que $AB = 0$ implique $BA = 0$?

Exercice 7 *On considère les matrices à coefficients réels*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer (si cela a un sens) les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2. En déduire que A et C sont inversibles et préciser leur inverse.

Exercice 8 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *et soit* $\sigma(A)$ *la somme de tous les coefficients de la matrice* A.
1) Ecrire $\sigma(A)$ *comme une double somme.*
2) Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ *la matrice dont tous les coefficients valent* 1. *Exprimer* JAJ *en fonction de* $\sigma(A)$ *et de* J.

Exercice 9 *Inverser la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 *Calculer* ABC *lorsque :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver $B \in M_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A = 2I + B$.
2) Calculer B^2 *et* B^3.
3) En déduire A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 *Calculer le rang de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 *Soit* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ *et*

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Calculer $A_\theta A_{\theta'}$ *puis* A_θ^n *où* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 *et en déduire* A^{-1}.

Exercice 15 *Soit* $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $A^k = \lambda^k(B + kC)$ *pour* $k = 1, 2, 3$.
1) Calculer* A^3 *de deux manières (*$A^3 = A^2A = AA^2$*) et montrer que* $BC = CB$.
2) Montrer de même que* $C^2 = 0$ *(étudier* A^4*), que* $BC = C$ *et* $B^2 = B$ *(en utilisant aussi des puissances de* A*).*
3) Montrer par réccurence que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a* $A^k = \lambda^k(B + kC)$.

Exercice 16 *Soit* m *un réel. Calculer l'inverse des matrices suivantes lorsque c'est possible :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & m+1 & m-2 \\ 2 & 2m+1 & 2m-4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 *1) Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$ pour toutes matrices carrées A, B, de taille (n, n).*
2) Calculer $Tr(AA^T)$ où A est une matrice carré de taille n. Que dire d'une matrice A à coefficients réels qui vérifie $Tr(AA^T) = 0$?
3) Si A, B, C, D sont 4 matrices de taille n, alors $ABCD$ a la même trace que $DCBA$ ou $BADC$ ou $BADC$ ou $ACBD$ ou $BCDA$?

Exercice 18 *On considère les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ données par*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer P^{-1}.
2) Calculer $B = P^{-1}AP$.
3) Montrer que pour tout $n \in I\!N$, $A^n = PB^nP^{-1}$. En deduire A^n.

Exercice 19 *Soit $a, b, \in \mathbb{R}$. Déterminer les matrices $(2, 2)$ qui commutent avec*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 20 *Inverser les matrices suivantes (ci-dessous $x \in \mathbb{R}$) :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque A est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 *On considère des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit x et y deux vecteurs colonne de taille $(n, 1)$. Soit A une matrice de taille (n, n) Calculer les produits suivants :*
- produit scalaire de x par y : x^Ty. A quelle condition x^Tx est-il nul ?
- produit extérieur de x par y : xy^T. Calculer le produit $(xy^T)(xy^T)$ en fonction de la matrice xy^T
- forme bilinéaire : x^TAy.

Exercice 23 *Déterminer l'inverse M^{-1} de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Trouver ensuite une matrice X de taille $(3, 3)$ telle que

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 24 *Calculer les produits de matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 25 *Trouver toutes les matrices* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telles que la famille* $\{A, A^\top, I_n\}$ *soit liée dans* $M_n(\mathbb{R})$*, c.a.d. telles qu'il existe* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *tels que* $A = \lambda A^\top + \mu I_n$.

Exercices de synthèse.

Exercice 26 *Soit*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^3 - A^2 - A + I_3$*. Montrer que* A^{-1} *existe et calculer* A^{-1} *en fonction de* A.

Exercice 27 *Pour* $s, t \in \mathbb{R}$*, on pose*

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

1) Que vaut $A(1)$ *?*
2) Montrer que pour $s, t \in \mathbb{R}$ *on a* $A(s)A(t) = A(u)$ *pour une certaine valeur de* $u \in \mathbb{R}$ *à préciser. En déduire que* $A(s)$ *et* $A(t)$ *commutent.*
3) Résoudre $A(t)^2 = A(-3/2)$
4) On note $Q = A(1/2)$*. Trouver une matrice* $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *telle que* $QX = 0$*. La matrice* Q *est-elle inversible ?*
5) Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$*,* $Q(t)$ *est-elle inversible ?*

Exercice 28 *1*) Pour* $A \in M_n(\mathbb{R})$*, montrer que* $\min_j \max_i a_{i,j} \geq \max_i \min_j a_{i,j}$.
2) Résoudre dans* $M_2(\mathbb{R})$ *l'équation :* $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 29 *Exercice facultatif (plus difficile). Soit* A *une matrice réelle carré telle que pour tout* $1 \leq i \leq n$*, on a*

$$|a_{i,i}| > \sum_{1 \leq j \leq n;\ j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A *est inversible (lemme d'Hadamard lié au théorème de Gerschgorin).*

Exercice 30 *(plus difficile). Soit* $A \in M_{r,n}(\mathbb{R})$ *de rang* r.
1) Montrer que $AA^\top$ *est symétrique carré de taille* r.
*2**) Montrer que* $AA^\top$ *est inversible (on pourra admettre cette question plus difficle).*
3) Soit $S = I_n - A^\top(AA^\top)^{-1}A$*. Montrer que* $S^\top = S$ *et que* $S^2 = S$.