L1S2 MI/MP - Algèbre 2 - Université d'Avignon - Année 2022/2023

Feuille 3 : Sous-espaces vectoriels de K^n ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$)

Exercice 1. *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ muni des lois usuelles ? Faire un dessin.*

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2x - 8y = 0\} \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x = 1\}$$
$$E_3 = \{(x,x) /\ x \in \mathbb{R}\} \quad E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^4 + (x-y)^2 = 0\}$$
$$E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ xy \geq 0\} \quad E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 - y^2 = 0\}$$

Exercice 2. *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ muni des lois usuelles ?*

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x = y^2 + z^2\} \quad E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x = y + z \textit{ et } x + y = 0\}$$
$$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x = y + z \textit{ ou } x + y = 0\} \quad E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ xy = z\}$$
$$E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x = y = z\} \quad E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x = 0\}$$

Exercice 3. *Dans chacun des cas suivants, E est un espace vectoriel muni des lois usuelles et A est une partie de E. Déterminer l'espace vectoriel engendré par A et en donner un supplémentaire dans E.*
1) $E = \mathbb{R}^2$ *et* $A = \{(1,2)\}$. *Représenter graphiquement* $\mathrm{vect}(A)$.
2) $E = \mathbb{R}^3$ *et* $A = \{(1,0,0),(1,1,0)\}$.

Exercice 4. *Soit F, G deux sev de $\mathbb{R}^n$.*
1) Que signifie l'écriture $F \oplus G$? Que signifie que F et G sont deux sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$?
2) Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ;\ x - 2y = 0 \text{ et } y - 3z + t = 0\}.$$

Exercice 5. *Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x - y + z = 0\}$. Montrer que F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(1,0,-1),(0,-1,-1)\}$. Donner un sous-espace supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 6. *On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Que peut-on dire de n ? Les familles suivantes sont-elles libres ?*
(i) $\{e_2, 2e_2, e_3\}$
(i) $\{e_1, -e_3\}$
(i) $\{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\}$
(i) $\{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\}$
(i) $\{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}$

Exercice 7. *Les familles suivantes sont-elles libres ?*

1. (v_1, v_2, v_3) *dans* $\mathbb{R}^3$ *avec* $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ *et* $v_3 = (3,7,1)$.
2. (v_1, v_2, v_3) *dans* $\mathbb{R}^3$ *avec* $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ *et* $v_3 = (1,1,1)$.
3. (v_1, v_2, v_3) *dans* $\mathbb{R}^4$ *avec* $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$ *et* $v_3 = (1,1,1,1)$.
4. (v_1, v_2, v_3, v_4) *dans* $\mathbb{R}^4$ *avec* $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,2,0,0)$, $v_3 = (0,1,1,1)$ *et* $v_4 = (0,0,1,1)$.

Exercice 8. *Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient a_1, a_2, a_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par $a_1 = (0,-2,3)$, $a_2 = (1,2,1)$, $a_3 = (3,0,-4)$.*
1) Montrer que (a_1, a_2, a_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Soit u le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$ dans la base (a_1, a_2, a_3). Quelles sont ses coordonnées dans la base (e_1, e_2, e_3) ?
3) Soit v le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). Quelles sont ses coordonnées dans la base (a_1, a_2, a_3) ?

Exercice 9. *Soit dans* $\mathbb{R}^3$ *la famille* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *définie par* $u_1 = (1, a, 3)$, $u_2 = (1, 1, a)$, $u_3 = (a, 1, 3)$. *Etudier suivant les valeurs de a l'indépendance linéaire de la famille et préciser à chaque fois qu'elle est liée une relation de liaison.*

Exercice 10. *Soit dans* $\mathbb{R}^3$, $u = (3, 7, 0)$, $v = (5, 0, -7)$, $w = (2, 3, -1)$, $t = (1, -1, -2)$. *Montrer que* $\{w, t\}$ *et* $\{u, v\}$ *sont deux familles libres et qu'elles engendrent le même sev de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. *Montrer qu'il existe deux réels* x, y *tels que* $(-2, x, y, 3)$ *appartienne au sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les deux vecteurs* $(1, -1, 1, 2)$ *et* $(-1, 2, 3, 1)$.

Exercice 12. *Montrer que l'ensemble* $F := \{(a, 0, 0, b)\ ;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *; donner deux vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ *permettant de recouvrir* F *à l'aide de combinaisons linéaires. Trouver un système d'équations cartésiennes de* F.

Exercice 13. *1) Soit* $a = (2, -1, 1)$ *et* $b = (1, 0, 1)$. *Trouver une équation cartésienne de* $Vect(a, b)$.
2) Même question dans $\mathbb{R}^4$ *avec* $a = (1, 2, 3, 4)$ *et* $b = (2, 1, 2, 1)$.

Exercice 14. *Soit* $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + y + z = 0\}$, $a = (1, -2, 3)$, $b = (2, 1, -1)$, *et* $F = Vect(a, b)$.
1) Montrer que E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer* $E \cap F$.
2) Calculer $E \cap F$ *et en déduire que* E *et* F *ne sont pas en sommes directes.*
3) Trouver la dimension de E *et de* F, *calculer* $\dim(E) + \dim(F)$, *et retrouver le résultat de la question 2.*

Exercice 15. *Soit* G *le sev de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par* $(1, -1, 2, -2)$, $(4, 0, 1, -5)$ *et* $(3, 1, -1, -3)$ *et soit* H *l'espace défini par* $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ x + y = 0 \text{ et } x - y - +z + 2t = 0\}$.
1) Déterminer la dimension de G, *montrer que* H *est un sev de* $\mathbb{R}^4$ *et trouver sa dimension.*
2) Déterminer les dimensions de $G \cap H$ *et de* $G + H$.
3) Trouver un sev F *de* $\mathbb{R}^4$ *tel que* $(G + H) \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Exercice 16. *1) Peut-on exprimer les vecteurs* $u = (1, 1, 1)$ *et* $u' = (2, 2, -4)$ *comme combinaison linéaire de* $v = (1, 0, 2)$, $w = (2, 1, 0)$ *et* $t = (-1, 1, -6)$ *?*
2) La famille (v, w, t) *est-elle une base de* $\mathbb{R}^3$ *?*
3) Exprimer w *comme combinaison linéaire de* v *et* t.
4) Compléter la famille (v, t) *de façon à obtenir une base de* $\mathbb{R}^3$.
5) Déterminer les coordonnées de u *et* u' *dans cette nouvelle base.*

Exercice 17. *Soit* $\mathcal{F} = \{x_1, ..., x_p\}$ *une famille de* p *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* A *la matrice de taille* (n, p) *dont les colonnes sont les vecteurs* $x_1, ..., x_p$. *Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La famille* $\mathcal{F}$ *est liée.*
2. *Il existe* $i \in \{1, ..., n\}$ *et des réels* $(\beta_j)_{j \neq i}$ *tels que*
$$x_i = \sum_{j \neq i} \beta_j x_j$$
3. *L'équation* $Ay = 0$ *(d'inconnue* $y \in \mathbb{R}^p$*) admet au moins une solution non triviale* $y^0 \neq 0$
4. *L'équation* $Ay = 0$ *admet une infinité de solutions.*
5. *L'algorithme du pivot de Gauss effectué sur la matrice* A *aboutit à une matrice contenant un nombre de pivots strictement inférieur à* p.

Exercice 18. *Soit* A *la partie de* $\mathbb{R}^4$ *définie par*
$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ 2x + 3y + z = 0,\ 4x - y + t = 0\}.$$
Trouver une base de A *après avoir vérifié qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.

Exercice 19. *Vrai ou faux ? (Si c'est vrai, on demande une preuve, sinon un contre-exemple).*

1. *Lorsque $\mathcal{F}$ est une famille libre, tout élément de $\mathcal{F}$ peut être écrit comme une combinaison linéaires des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.*
2. *Les vecteurs colonnes d'une matrice A de taille $(4,5)$ sont forcément liées.*
3. *Si 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont dans un un même plan affine, alors ces trois vecteurs sont nécessairement liés.*
4. *Si $\{u,v\}$ est libre et si $\{u,v,w\}$ est liée, alors on a nécessairement que $w \in Vect(u,v)$.*
5. *Si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ compte strictement moins de n vecteurs alors elle est libre.*

Exercice 20. *(pour revoir le cours). Soit F et G deux sev de $\mathbb{R}^n$ tels que $F \subset G$ et $dim(F) = dim(G)$. Montrer que $F = G$.*

Exercice 21. *1) Caractériser les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2) Montrer que deux plans vectoriels se coupent toujours au moins suivant une droite dans $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer que l'intersection entre deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ contient au moins un plan.
4) Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, l'intersection entre k hyperplans est de dimension au moins $n-k$ (réccurence).

Exercice 22. *Soit $\{u_1, ..., u_n\}$ une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et soit pour $1 \leq k \leq n-1$, $v_k = u_k + u_{k+1}$ et $v_n = u_n + u_1$. La famille $\{v_1, ..., v_n\}$ est-elle libre, génératrice ?*

Exercice 23. *On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1,2,3,4)$, $u_2 = (1,1,1,3)$, $u_3 = (2,1,1,1)$, $u_4 = (-1,0,-1,2)$, $u_5 = (2,3,0,1)$. Soit $F = Vect(u_1,u_2,u_3)$, $G = Vect(u_4,u_5)$. Calculer* $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F \cap G)$, *et* $\dim(F+G)$.

Exercice 24. *Soit E et F les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :*

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; x+y+z+t = 0 \text{ et } x+2y-z+t = 0 \text{ et } -x-y+2z+2t = 0\},$$

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; x+3y+4t = 0\}.$$

A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Exercice 25. *Soit dans $\mathbb{R}^4$ $u_1 = (1,1,1,2)$, $u_2 = (0,2,0,0)$, $u_3 = (1,-1,2,2)$, et $u_4 = (1,-1,2,3)$. Soit $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Exprimer e_i dans la base $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, $i = 1,2,3,4$. Puis exprimer un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ quelconque dans cette base.*

Exercice 26. *(exercice facultatif / hors programme). Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et anti-symétriques de taille n.*
1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer leur dimension et montrer que

$$M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

2) Montrer qu'une matrice quelconque de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ n'est pas inversible.
3) Montrer que le produit de deux matrices symétriques A et B est symétrique (resp. anti-symétrique) si et seulement si $AB = BA$ (resp. $AB = -BA$).