Feuille 6 - Diagonalisation et applications

Exercice 1 Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs et espaces propres de A.
2) Diagonaliser A.
3) En déduire, en fonction de u_0 et v_0, l'ensemble des suites (u_n), (v_n) vérifiant la relation de récurrence
$$(E) \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 4v_n, \end{cases}$$

Exercice 2 Diagonalisez la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Exercice 3 Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Diagonaliser A. Soit $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.
2) Soit $X(t) = {}^T(x(t), y(t), z(t))$ la solution du système d'équations différentielles
$$(S) \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \\ z'(t) = x(t) - 3y(t) + 4z(t) \end{cases}.$$

a) Vérifiez que $X'(t) = A\,X(t)$
b) On pose $Y(t) = PX(t)$, montrez que $Y'(t) = D\,Y(t)$ et en déduire $Y(t)$.
c) En déduire la forme générale de la solution $(x(t), y(t), z(t))$.
d) Trouver la solution de (S) vérifiant $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Exercice 4

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y^2 = D$.
   (a) Calculer YDY^{-1} et en déduire que Y et D commutent.
   (b) En déduire que Y est diagonale puis déterminer Y.
2. (a) Montrer que A est diagonalisable.
   (b) En déduire les solutions $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2 = A$.