Chapitre 3: sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Térence Bayen

Université d'Avignon

Algèbre 2
L1S2 MI/MP
février 2021

AVIGNON UNIVERSITÉ

UNIVERSITÉ D'AVIGNON
UNIVERSITÉ D'AVIGNON ET DES PAYS DE VAUCLUSE

Définition axiomatique[1] d'un espace vectoriel E

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un ensemble non-vide vérifiant les 8 règles suivantes :

1. $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in E$, $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\forall x \in E$, $x + 0 = x$ (existence de l'élément neutre dans E)
4. $\forall x \in E$, $x + (-x) = 0$ (existence d'un symétrique)
5. $\forall x \in E$, $1.x = x$
6. $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x, y \in E$, $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$
7. $\forall \alpha \in K$, $\forall x, y \in E$, $\alpha(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
8. $\forall \alpha, \beta \in K$, $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

(le . est la multiplication par un réel ou un complexe).

1. Définition axiomatique $\rightarrow$ voir cours complément d'algèbre.

Exemple : dans le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

On peut additionner deux vecteurs (interprétation géométrique du parallélogramme)

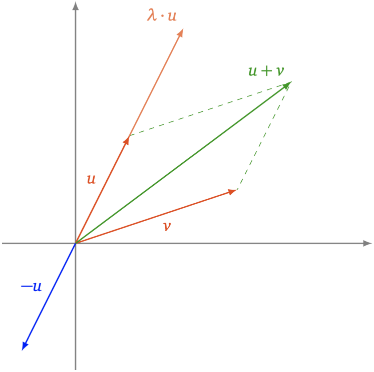
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et multiplier un vecteur par un réel :

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

La multiplication entre deux vecteurs n'a aucun sens ; ce n'est pas définie.

Exemple : dans le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Addition de deux vecteurs (règle du parallélogramme)

$$w = u + v$$

Définition de $\mathbb{K}^n$ comme espace vectoriel

Définition

1. *On appelle scalaire tout élément de* $\mathbb{K}$ *et vecteur tout n-uplet* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. *Le vecteur nul* $(0, \ldots, 0)$ *est noté* 0.
2. *La somme de deux vecteurs* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *est définie par*
$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$
3. *Le produit d'un vecteur* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *par un scalaire* λ *est défini par*
$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$
4. *L'ensemble* $\mathbb{K}^n$ *de tous les vecteurs, muni des deux opérations ci-dessus, est appelé espace vectoriel*[2].

L'addition est qualifiée d'interne et la multiplication d'externe.

2. On peut aussi parler d'espace vectoriel canonique de dimension n.

Exemples

- le plan euclidien $\mathbb{R}^2$; l'espace $\mathbb{R}^3$; $\mathbb{C}^2$...
- Avec $n = 4$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a

$$(1, \frac{3}{2}, \pi, \sqrt{3}) + (-1, \frac{1}{2}, 2\pi, \sqrt{2}) = (0, 2, 3\pi, \sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

- Avec $n = 4$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a

$$i.(1, 2i, \frac{-5}{2}, \sqrt{2}) = (i, -2, \frac{-5i}{2}, i\sqrt{2}).$$

Les expressions suivantes ne sont pas définies :

$$??(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) =??$$

$$??(1, 2) + (3, 4, 5) =??$$

Notations et règles de calcul

Notations : en général on omet les flèches sur les vecteurs ainsi que le . de la multiplication externe. On note

$$-v := -1.v \quad \text{et} \quad 0 = 0_{\mathbb{K}^n} = (0, ..., 0).$$

- $(1,2) + (3,4) = (3,4) + (1,2) = (4,6)$;
- $[(1,2) + (3,4)] + (5,6) = (1,2) + [(3,4) + (5,6)] = (9,12)$;
- $(1,2) + (0,0) = (1,2)$;
- $(1,2) + [-1.(1,2)] = (0,0)$;
- $1.(1,2) = (1,2)$;
- $2.[3.(1,2)] = (2 \times 3).(1,2) = 6.(1,2) = (6,12)$;
- $(2+3).(1,2) = 2.(1,2) + 3.(1,2) = (5,10)$;
- $2.[(1,2) + (3,4)] = 2.(1,2) + 2.(3,4) = (8,12)$.

Sous-espace vectoriel

Définition

Un ensemble $F \subset \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ si

1. $0 \in F$,
2. $\forall x, y \in F, \; x + y \in F$,
3. $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \; \lambda x \in F$.

Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, c'est plus simple de montrer que c'est un sev d'un certain espace vectoriel E avec dans ce cours principalement $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$!

A noter que F est un sev de $\mathbb{K}^n$ ssi

$$F \neq \emptyset \text{ et } \lambda x + \mu y \in F, \quad \forall x, y \in F, \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Vérification que F est un sev de $\mathbb{K}^n$

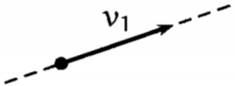
On rappelle que F est un sev de $\mathbb{K}^n$ ssi

1. $F \neq \emptyset$
2. pour tout $x, y \in F$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $\lambda x + \mu x \in F$.

Observations

Soit $n \geq 1$ un entier.

- $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ appelé **s.e.v. nul**.
- $\mathbb{K}^n$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.
- Si un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ contient un vecteur non nul v_1, alors il contient l'ensemble
$$\{\lambda v_1 : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
Un s.e.v. non nul de $\mathbb{K}^n$ contient donc au moins une droite : en particulier c'est un ensemble infini et non borné.



Quelques exemples et contre-exemples

Espaces vectoriels :

1. Plan euclidien $\mathbb{R}^2$; espace $\mathbb{R}^3$; $\mathbb{R}^n$
2. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles
3. Les polynômes de degré ≤ 2,

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

S.e.v. de $\mathbb{K}^n$ ou autres :

1. $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = -2x\}$
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y+z = 0\}$ mais $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+y+z = 1\}$ N'EST PAS un sev de $\mathbb{R}^3$.
3. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{avec } u_0, u_1 \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ Pourquoi ? ? (à vérifier).

Un exemple en détail

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$ (D est une droite de $\mathbb{R}^2$).
Objectif : Montrer que D est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

- (i) On a $(0, 0) \in D$ car $2 \times 0 + 0 = 0$.
- (ii) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par définition de D, on a

$$2x_1 + y_1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2 + y_2 = 0. \tag{1}$$

D'autre part, on a

$$\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\underbrace{\lambda x_1 + \mu x_2}_{=:X}, \underbrace{\lambda y_1 + \mu y_2}_{=:Y}).$$

Pour voir que $(X, Y) \in D$, il reste à écrire

$$2X + Y = 2(\lambda x_1 + \mu x_2) + \lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda(2x_1 + y_1) + \mu(2x_2 + y_2) = 0,$$

où la dernière égalité résulte de (**??**).

Exercice : reconnaitre les s.e.v.

1) Parmi les 5 ensembles suivants :

- $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$
- $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = 0 \text{ ou } y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 0\}$

lequel est un sev ?

2) Quels sont les sev. de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$?

Propriétés des sous-espaces vectoriels

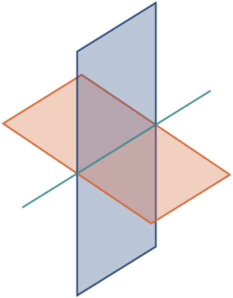
Proposition

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

$$\text{En effet :} \quad x \in F \cap G,\ y \in F \cap G \ \Rightarrow x, y \in F \Rightarrow \lambda x + \mu y \in F$$

car F est un sev de $\mathbb{K}^n$. De même pour G.

Illustration et utilisation du résultat précédent



Soient $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$. L'ensemble

$$\mathcal{I} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases} \right\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ car il est l'intersection de deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{I} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$$

où pour $i \in \{1, 2\}$, $\mathcal{P}_i := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_i x + b_i y + c_i z = 0 \right\}$.

Intersection de plusieurs sev

Proposition

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide (i.e., $I \neq \emptyset$) de s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ avec $n \geq 1$ fixé. Alors, l'intersection

$$\bigcap_{i\in I} F_i := \{x \in \mathbb{K}^n : \forall i \in I, x \in F_i\}$$

est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

Preuve. Puisque $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans chacun des F_i ($i \in I$), nous savons que $0_{\mathbb{K}^n}$ est dans l'intersection considérée.
Soient $x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Pour chaque $i \in I$, on a (car F_i est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$)

$$\lambda x + \mu y \in F_i.$$

Ceci nous dit que $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i\in I} F_i$. La preuve est terminée. ■

Exercice (classique) sur la réunion de deux sev

$F \cup G$ n'est jamais un sev !

Exercice

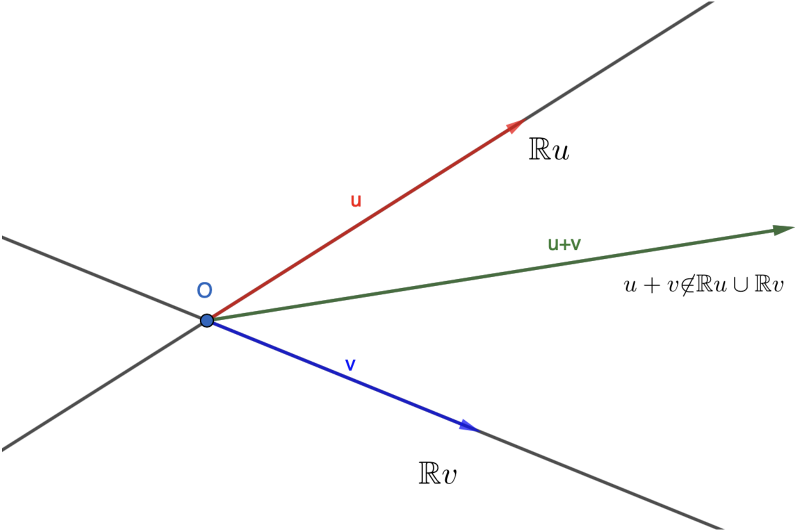
Soit F, G, deux sev de $\mathbb{K}^n$. Alors $F \cup G$ est un sev si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

$\Rightarrow$: Supposons qu'il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$ et qu'il existe $y \in G$ tel que $y \notin F$. Comme $F \cup G$ est un sev et que $x \in F \cup G$ et $y \in F \cup G$, on a : $x + y \in F \cup G$. Si $x + y \in F$ alors $y = x + y + (-x) \in F$, faux. Si $x + y \in G$, alors $x = (x + y) + (-y) \in G$, faux. Contradiction $\Rightarrow$

$$\forall x \in F,\ x \in G \ \text{ ou } \ \forall x \in G,\ x \in F.$$

$\Leftarrow$: $F \subset G \Rightarrow F \cup G = G$; $G \subset F \Rightarrow F \cup G = F$

Exercice (classique) sur la réunion de deux sev



Propriétés des sous-espaces vectoriels

Proposition

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène

$$Ax = 0$$

d'inconnue $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$.

En effet, pour tout couple de scalaires λ, μ :

$$A0 = 0, \; Ax = 0 \text{ et } Ay = 0 \; \Rightarrow A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay = 0$$

Remarque : l'ensemble s'écrit

$$\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; Ax = 0\}$$

Propriétés des sous-espaces vectoriels (suite)

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. Etant donnés $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls et $b \in \mathbb{K}$, on appelle **hyperplan affine** *de $\mathbb{K}^n$ l'ensemble*

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b\} .$$

Lorsque $b = 0$, l'ensemble ci-dessus est appelé **hyperplan vectoriel** de $\mathbb{K}^n$. Pour $n = 2$ (resp. $n = 3$) le terme "hyperplan" est remplacé par "droite" (resp. "plan").

Ainsi, un système linéaire (resp. **système linéaire homogène**) de $\mathbb{K}^n$ est une intersection finie d'hyperplans affines (resp. vectoriels) de $\mathbb{K}^n$. Ceci revient à se donner m équations de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Combinaisons linéaires

Définition

Soient x et y des vecteurs non nuls. On dit que x et y sont colinéaires s'il existe un scalaire λ tel que $y = \lambda x$.

Définition

Soient $y, x_1, ..., x_m$ des vecteurs. On dit que y est combinaison linéaire de $x_1, ..., x_m$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tels que

$$y = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m.$$

Par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 4$, $p = 2$, $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (5, 6, 7, 8)$, alors :

$$2v_1 - 3v_2 = (2, 4, 6, 8) - (15, 18, 21, 24) = (-13, -14, -15, -16)$$

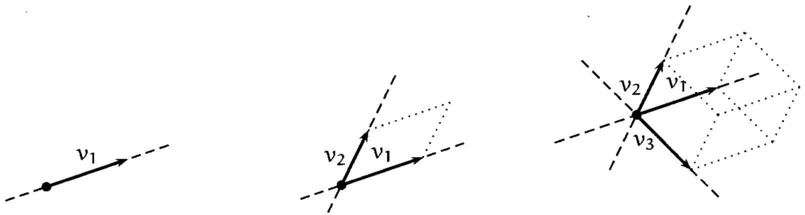
est une combinaison linéaire de v_1 et de v_2.

Combinaisons linéaires

Proposition

Soient $v_1, \ldots, v_m$ m vecteurs de $\mathbb{K}^m$. L'ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_m$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Il est appelé sous-espace vectoriel engendré[3] par $v_1, \ldots, v_m$ et il est noté

$$Vect(v_1, \ldots, v_m).$$



3. Noté aussi parfois $\mathbb{K}v_1 + \cdots + \mathbb{K}v_m$

Combinaisons linéaires

Si $v_1, \ldots, v_m$ sont m vecteurs de $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_m) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \; ; \; \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}\}.$$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, soit $u = (1, 2, 3)$ et $v = (0, 1, 2)$. On a :

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

c.a.d.

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Combinaisons linéaires

Justifions que

$$\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_m)$$

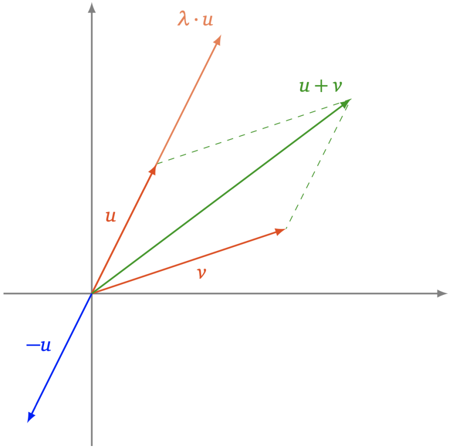
est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$.

- Il contient $0_{\mathbb{K}^n}$ car $0_{\mathbb{K}^n} = 0.v_1 + \ldots + 0.v_m$.
- On observe d'une part que la somme de deux combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_m$ est une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_m$ (POURQUOI ?) et d'autre part que le produit de $\lambda \in \mathbb{K}$ par une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_m$ reste une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_m$ (POURQUOI ?).

Propriété

Soit $v_1, ..., v_m$ m vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors, Vect$(v_1, ..., v_m)$ est le plus petit s.e.v. contenant la famille $\mathcal{F} := \{v_1, ..., v_m\}$.

$v_i \in F \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k \in F$...



$$u + v \in \mathrm{Vect}(u, v)\ ; \quad w = -u \in \mathrm{Vect}(u, v)\ ;\ \lambda u \in \mathrm{Vect}(u)$$

En résumé

Soit $v_1, \ldots, v_m$ m vecteurs de $\mathbb{K}^m$.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_m) &= \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \;;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathbb{K}v_1 + \cdots + \mathbb{K}v_m\end{aligned}}$$

Somme de sous-espaces vectoriels

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. La somme de F et G est l'ensemble

$$F + G = \{x + y \; ; \; x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

Proposition

La somme de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

En effet : $0 \in F + G$; $z, z' \in F + G \Rightarrow z = x + y$ et $z' = x' + y'$ avec $(x, y) \in F \times G$, $(x', y') \in F \times G \Rightarrow$
$\lambda z + \mu z' = [\lambda x + \mu x'] + [\lambda y + \mu y'] \in F + G$.

Proposition

Soient $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_p$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On a

$$Vect(v_1, \dots, v_m) + Vect(w_1, \dots, w_p) = Vect(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_p).$$

Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition

(i) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ tels que $F \cap G = \{0\}$. La somme de F et G est alors dite directe et est notée $F \oplus G$.
(ii) Si on a l'égalité

$$\mathbb{K}^n = F \oplus G,$$

on dit que F et G sont supplémentaires, ou que F (resp. G) est un supplémentaire de G (resp. F).

Proposition

Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ tels que $H = F \oplus G$. Alors tout vecteur de H se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

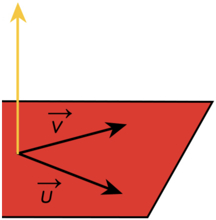
Preuve de l'unicité : $z = x + y = x' + y' \Rightarrow x - x' = y' - y \in F \cap G \Rightarrow x - x' = y' - y = 0$ car $F \cap G = \{0\}$.

Exemples d'espace supplémentaires

1. On a $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$ où $F := \mathbb{R}(1,1)$ et $G := \mathbb{R}(1,2)$. En effet : $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = (2x-y)(1,1) + (y-x)(1,2)$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \Rightarrow \ (x,y) \in F + G$$

   de plus $F \cap G = \{0\}$.
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = 0\}$. Alors F et G ne sont PAS en somme directe car $F \cap G = \mathbb{R}(0,0,1)$ mais $\mathbb{R}^3 = F + G$ (Pourquoi ? ?)
3. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $P = \mathrm{Vect}(u,v)$ et $w \notin P \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}w \oplus P$



Familles libres

Définition

(i) Une famille $(v_1, ..., v_m)$ de vecteurs est dite libre si pour toute famille $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ de scalaires

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m x_m = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_m = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, ..., v_m$ sont linéairement indépendants.
(ii) Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Proposition

Une famille $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

(c.a.d., si par exemple $\mathcal{F} = \{u, v, w\}$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $w = \alpha u + \beta v$)

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$ posons $e_1 = (1,0)$; $e_2 = (0,1)$; $e_3 = (-1,-1)$
   - $\{e_1\}$; $\{e_2\}$; $\{e_1, e_2\}$ sont libres
   - $\{e_1, e_2, e_3\}$ est liée car $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.
2. Profil type de l'exercice ultra classique : dans $\mathbb{R}^3$:
   $\mathcal{F} = \{(1,0,1),(0,2,2),(3,7,1)\}$.

$$\alpha(1,0,1) + \beta(0,2,2) + \gamma(3,7,1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha & & +3\gamma & = 0 \\ & 2\beta & +7\gamma & = 0 \\ \alpha & +2\beta & +\gamma & = 0 \end{array} \right.$$

On résout le système linéaire... $\quad 2\beta - 2\gamma = 0 \Rightarrow 9\gamma = 0 \Rightarrow$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice (classique)

Soit $v_1, \ldots, v_n$, n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Alors la famille

1. $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$ est

Exercice (classique)

Soit $v_1, \ldots, v_n$, n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Alors la famille

1. $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$ est liée :

$$(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) + (v_n - v_1) = 0$$

Exercice (classique)

Soit $v_1, \ldots, v_n$, n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Alors la famille

1. $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$ est liée :

$$(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) + (v_n - v_1) = 0$$

2. $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3 \ldots, v_1 + \cdots + v_n\}$ est

Exercice (classique)

Soit $v_1, ..., v_n$, n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Alors la famille

1. $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, ..., v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$ est liée :

$$(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) + (v_n - v_1) = 0$$

2. $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3 ..., v_1 + \cdots + v_n\}$ est libre :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2) + \cdots + \alpha_n(v_1 + \cdots + v_n) = 0 \Rightarrow$$

Exercice (classique)

Soit $v_1, ..., v_n$, n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Alors la famille

1. $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, ..., v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$ est liée :

$$(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) + (v_n - v_1) = 0$$

2. $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3 ..., v_1 + \cdots + v_n\}$ est libre :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 (v_1 + v_2) + \cdots + \alpha_n (v_1 + \cdots + v_n) = 0 \ \Rightarrow$$

$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) v_1 + (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n) v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \ \Rightarrow$$

Exercice (classique)

Soit $v_1, \ldots, v_n$, n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Alors la famille

1. $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$ est liée :

$$(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) + (v_n - v_1) = 0$$

2. $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3 \ldots, v_1 + \cdots + v_n\}$ est libre :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2) + \cdots + \alpha_n(v_1 + \cdots + v_n) = 0 \;\Rightarrow$$

$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)v_1 + (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n)v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n & = 0 \\ \alpha_2 + \cdots + \alpha_n & = 0 \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n & = 0 \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

car $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre. D'où $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$.

Remarque

1. *Un vecteur forme une famille liée si et seulement si c'est le vecteur nul (c.a.d.* $\lambda u = 0$ *avec* $u \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$*).*
2. *Deux vecteurs non nuls forment une famille liée si et seulement si ils sont colinéaires (c.a.d. on a* $\alpha u + \beta v = 0$ *avec* $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$*).*

Proposition

Soit $(v_1, ..., v_m)$ *une famille libre. Alors*

- *aucun des* v_i *n'est nul ;*
- *les* v_i *sont deux à deux non colinaires ;*
- *toute sous-famille de* $(v_1, ..., v_m)$ *est libre.*

Proposition

Soit $(v_1, \ldots, v_m)$ une famille libre et y un vecteur. Alors y est combinaison linaire de $v_1, \ldots, v_m$ si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_m, y)$ est liée.

<u>Preuve</u>.
$\Rightarrow y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k \Rightarrow$ on obtient la relation de liaison :

$$y - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = 0.$$

$\Leftarrow$ il existe $\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des scalaires t.q.

$$\lambda y + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = 0.$$

Si $\lambda = 0$, alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ Pourquoi ? ?. Donc $\lambda \neq 0$, ainsi

$$y = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{\lambda} v_k.$$

Familles génératrices

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Une famille $(v_1, ..., v_m)$ de vecteurs est dite génératrice de F si

$$F = Vect(v_1, ..., v_m).$$

Exemple : Les vecteurs $e_1, ..., e_n$ définis par $e_i = (e_i^1, ..., e_i^n)$, $e_i^j = 1$ si $i = j$, $e_i^j = 0$ si $i \neq j$, forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$:

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad x = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + x_2 \underbrace{(0,1,0)}_{e_2} + x_3 \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

Familles génératrices et lemme de Steinitz

Lemme de Steinitz

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Si $\{v_1, ..., v_m\}$ est une famille génératrice de F, alors toute famille de $m+1$ vecteurs de F est liée.

Preuve par réccurence sur m : voir poly.

On déduit le résultat FONDAMENTAL suivant

Corollaire

(i) Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est liée.
(ii) Toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ est de cardinal inférieur ou égal à n.

Preuve :

(i) $\{e_1, ..., e_n\}$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$; appliquer le résultat précédent. Pour (ii) par l'absurde.

Comment obtenir une famille génératrice ?

Soit $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\right\}$. On a vu que $\mathcal{D}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. Nous allons montrer comment obtenir une famille génératrice de $\mathcal{D}$, i.e., comment trouver $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\mathcal{D} = \operatorname{vect}\{v_1, \dots, v_p\}.$$

En écrivant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (x, -2x) \Leftrightarrow (x, y) = x(1, -2)$$

on voit que

$$\mathcal{D} = \{\lambda(1, -2) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{vect}\{(1, -2)\} =: \mathbb{R}(1, -2).$$

Le s.e.v. $\mathcal{D}$ admet donc une famille génératrice à 1 élément constituée du vecteur $(1, -2)$.

A méditer

On peut facilement observer que

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} \\ &= \operatorname{vect}\{(1,-2),(2,-4)\} \\ &= \operatorname{vect}\{(1,-2),(2,-4),(3,-6)\} = \ldots\end{aligned}$$

A méditer

On peut facilement observer que

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} \\ &= \operatorname{vect}\{(1, -2), (2, -4)\} \\ &= \operatorname{vect}\{(1, -2), (2, -4), (3, -6)\} = \dots\end{aligned}$$

Par exemple : $(x, -2x) = \frac{x}{2}(1, -2) + \frac{x}{4}(2, -4)\dots.$

A méditer

On peut facilement observer que

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\} \\ &= \mathrm{vect}\,\{(1, -2), (2, -4)\} \\ &= \mathrm{vect}\,\{(1, -2), (2, -4), (3, -6)\} = \ldots \end{aligned}$$

Par exemple : $(x, -2x) = \frac{x}{2}(1, -2) + \frac{x}{4}(2, -4)\ldots$.

Conséquences.

- Pas d'unicité de la famille génératrice.
- Pas d'unicité du nombre d'éléments d'une famille génératrice : l'intérêt est d'avoir à disposition une famille génératrice avec le plus petit nombre d'éléments possible.

D'une famille génératrice vers une équation cartésienne

- Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{D} := \mathrm{vect}(u)$ où $u = (3,5)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, (x,y) = t(3,5) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3t \\ y = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3}x - y = 0.$$

L'avant-dernière équivalence donne une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ tandis que la dernière propose une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

- Dans $\mathbb{R}^3$, $P := \mathrm{vect}(u, v)$ avec $u = (1,1,1)$ et $v = (-1,0,2)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \lambda - \mu \\ y & = \lambda \\ z & = \lambda + 2\mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = y \\ \mu = y - x \\ 0 = z - y - 2(y - x) \end{cases} \Rightarrow 2x - 3y + z = 0.$$

Exercice pour s'entraîner

1) Montrer que :

$$\mathcal{P} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} = \mathrm{vect}\,\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

2) Peut-on trouver une famille génératrice de $\mathcal{P}$ qui ne contienne qu'un seul élément ?

Exercice pour s'entraîner

1) Montrer que :

$$\mathcal{P} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} = \operatorname{vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

2) Peut-on trouver une famille génératrice de $\mathcal{P}$ qui ne contienne qu'un seul élément ?

<u>correction</u> : on a

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y)$$

Exercice pour s'entraîner

1) Montrer que :

$$\mathcal{P} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\} = \mathrm{vect}\,\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$$

2) Peut-on trouver une famille génératrice de $\mathcal{P}$ qui ne contienne qu'un seul élément ?

<u>correction</u> : on a

$$(x,y,z) = (x,y,-x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$$

et $(1,0,1)$ et $(0,1,-1)$ ne sont pas colinéaires

Autres exemples

- toute famille de 4 vecteurs $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^3$ est

Autres exemples

- toute famille de 4 vecteurs $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^3$ est liée !

Autres exemples

- toute famille de 4 vecteurs $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^3$ est liée !
- Les familles suivantes sont elles génératrices (resp. de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) ?

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Autres exemples

- toute famille de 4 vecteurs $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^3$ est liée !
- Les familles suivantes sont elles génératrices (resp. de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) ?

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Autres exemples

- toute famille de 4 vecteurs $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^3$ est liée !
- Les familles suivantes sont elles génératrices (resp. de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) ?

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Autres exemples

- toute famille de 4 vecteurs $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^3$ est liée !
- Les familles suivantes sont elles génératrices (resp. de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) ?

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

non / oui / non

Retour sur $\mathcal{F}_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} 5a + 2c = x \\ a + 8c = y \end{cases}$$

(on vérifie que ce système admet une seule et unique solution).
Donc la famille est génératrice.

Retour sur $\mathcal{F}_3$

$$\mathcal{F}_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\frac{3}{2}(u+v)} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_3 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x - z = 0\}$ car

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = x \\ \lambda - \mu & = y \\ \lambda + \mu & = z \end{cases}$$

Bases dans $\mathbb{K}^n$

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. On dit qu'une famille $\{v_1, ..., v_m\}$ de vecteurs est une base de F si c'est une famille libre et génératrice.

Théorème

Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ non réduit à $\{0\}$ admet une base.

Preuve : soit $\{v_1, ..., v_m\}$ une famille libre de F de cardinal maximal. Soit $v \in F$ quelconque. Alors la famille de F, $\{v_1, ...v_m, v\}$, est liée. Donc $\{v_1, ..., v_m\}$ est génératrice.

Exemple FONDAMENTAL. La famille $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, dite base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $n = 4$:

$$\{(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)\}$$

est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Bases dans $\mathbb{K}^n$

Théorème (théorème de la base incomplète)

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ non réduit à $\{0\}$. Soient $\{v_1, ..., v_m\}$ et $\{w_1, ..., w_p\}$ deux familles de vecteurs de F respectivement libre et génératrice. Alors, on peut compléter $\{v_1, ..., v_m\}$ par des vecteurs de $\{w_1, ..., w_p\}$ pour obtenir une base de F.

Preuve : considérer une famille libre de F contenant $\{v_1, ..., v_m\}$, inclue dans $\{v_1, ..., v_m, w_1, ..., w_p\}$ de cardinal maximal $m + k$:

$$\mathcal{F} := \{v_1, ..., v_m, w_{i_1}, ..., w_{i_k}\}.$$

Alors, $j \notin \{i_1, ..., i_k\} \Rightarrow$

$$\{v_1, ..., v_m, w_{i_1}, ..., w_{i_k}, w_j\} \quad \text{est liee.}$$

On montre que tout vecteur x se décompose bien sur $\mathcal{F}$ (car sur tout les $(w_j)_{1 \leq j \leq n}$ et distinguer si $j \in \{i_1, ..., i_k\}$ ou pas).

(Démonstration : suite)

Il vient que si $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$

$$w_j = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{l,j} v_l + \sum_{m=1}^{k} \beta_{m,j} w_{i_m}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{j=1}^{p} x_j w_j \\
&= \sum_{r=1}^{k} x_{i_r} w_{i_r} + \sum_{j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}} x_j w_j \\
&= \sum_{r=1}^{k} x_{i_r} w_{i_r} + \sum_{j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}} x_j \left[\sum_{l=1}^{m} \alpha_{l,j} v_l + \sum_{m=1}^{k} \beta_{m,j} w_{i_m} \right]
\end{aligned}$$

Propriété de décomposition

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $\{v_1, \ldots, v_m\}$ une base de F. Tout vecteur x de F se décompose de manière unique sous la forme

$$x = t_1 v_1 + \ldots + t_m v_m$$

avec $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{K}$. Les scalaires $t_1, \ldots, t_m$ sont appelés coordonnées de x dans la base $(v_1, \ldots, v_m)$.

Encore la base canonique

$$\begin{aligned} x &= (x_1, ..., x_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \end{aligned}$$

où pour $1 \leq k \leq n$ e_k est le k-ième vecteur de la base canonique dans $\mathbb{K}^n$:

$$e_k = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{k}, 0, ..., 0)$$

Encore la base canonique

$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k e_k
\end{aligned}
$$

où pour $1 \leq k \leq n$ e_k est le k-ième vecteur de la base canonique dans $\mathbb{K}^n$:

$$e_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0)$$

Autre exemple : ecrire (x, y) sur $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,2)\}$

$$(x, y) = \left(\frac{(2x + y)}{3}(1,1) + \frac{(y - x)}{3}(-1,2) \right)$$

Dimension

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ non réduit à $\{0\}$. Toutes les bases de F comportent le même nombre de vecteurs.

Preuve : Il existe des bases. Soit $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de F de cardinal k et m. La famille $\mathcal{E}$ est libre et $\mathcal{E}'$ est génératrice

$$\Rightarrow \operatorname{card}(\mathcal{E}) = k \leq m = \operatorname{card}(\mathcal{E}')$$

(car sinon, par l'absurde, si $k > m$, alors $\mathcal{E}$ serait liée, cf. Steinitz).

....

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ non réduit à $\{0\}$. On appelle dimension de F, notée $\dim F$ *le nombre de vecteurs de toute base de F. Par convention,* $\dim\{0\} = 0$.

Exemples

1. $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est une base du plan $\mathcal{P}$ car

   $$\mathcal{P} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\} = \mathrm{vect}\,\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$$

   car $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Dans $\mathbb{R}^2$, dire quelles familles constituent une base de $\mathbb{R}^2$:

   $$\{(1,2)\}, \{(1,1),(1,2),(2,2)\}, \{(-7,56),(7,-57)\}$$

3. Trouver une base de

   $$F := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x+y-z+t=0 \text{ et } 2x-z-2t=0\}.$$

Solution

En résolvant le système,

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x - z - 2t = 0 \end{cases}$$

un vecteur $(x, y, z, t) \in F$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{2} + t \\ \frac{z}{2} - 2t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v}$$

Dimension

Proposition

On a $\dim \mathbb{K}^n = n$ *et* $\dim F \leq n$ *pour tout sous-espace vectoriel* F *de* $\mathbb{K}^n$.

Définition

Soit F *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$. *Si :*

1. $\dim F = 1$, *on dit que* F *est une droite vectorielle ;*
2. $\dim F = 2$, *on dit que* F *est un plan vectoriel ;*
3. $\dim F = n - 1$, *on dit que* F *est un hyperplan.*

Propriété fondamentale

Propriété FONDAMENTALE dans de nombreux exercices

Proposition

Soit F, G deux sev de $\mathbb{K}^n$. Alors :

$$F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G) \quad \Rightarrow F = G.$$

<u>Preuve</u> : prendre une base de F, $\{v_1, ..., v_m\}$ et compléter en une base de G, notée $\{v_1, ..., v_m, w_1, ..., w_p\}$ et si $p \geq 1$, alors contradiction par les dimensions.

Corollaire

Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$. Si $\dim F = n$, alors $F = \mathbb{K}^n$.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\dim F = m$.

1. *Si p vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors $p \leq m$.*
2. *Si m vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de F.*
3. *Si p vecteurs de F engendrent F, alors $p \geq m$.*
4. *Si m vecteurs de F engendrent F, alors ils forment une base de F.*

Preuve. 1. : Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une telle famille et $\{w_1, ..., w_m\}$ une base de F. Utiliser le thm. de la base incomplète.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\dim F = m$.

1. *Si p vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors $p \leq m$.*
2. *Si m vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de F.*
3. *Si p vecteurs de F engendrent F, alors $p \geq m$.*
4. *Si m vecteurs de F engendrent F, alors ils forment une base de F.*

Preuve. 1. : Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une telle famille et $\{w_1, ..., w_m\}$ une base de F. Utiliser le thm. de la base incomplète.

2. Soit $F' = Vect(u_1, ..., u_m)$ (où $u_i \in F$) qui vérifie $F' \subset F$ et $dim(F') = m$ par construction. Prop. précédente $\Rightarrow$ $F' = F$.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\dim F = m$.

1. *Si p vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors $p \leq m$.*
2. *Si m vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de F.*
3. *Si p vecteurs de F engendrent F, alors $p \geq m$.*
4. *Si m vecteurs de F engendrent F, alors ils forment une base de F.*

Preuve. 1. : Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une telle famille et $\{w_1, ..., w_m\}$ une base de F. Utiliser le thm. de la base incomplète.

2. Soit $F' = Vect(u_1, ..., u_m)$ (où $u_i \in F$) qui vérifie $F' \subset F$ et $dim(F') = m$ par construction. Prop. précédente $\Rightarrow F' = F$.

3. Soit $\{u_1, ..., u_p\}$ une telle famille et supposons que $p < m$. On peut extraire une base de F à partir de cette famille de cardinal $< m$. Absurde.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $\dim F = m$.

1. *Si p vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors $p \leq m$.*
2. *Si m vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de F.*
3. *Si p vecteurs de F engendrent F, alors $p \geq m$.*
4. *Si m vecteurs de F engendrent F, alors ils forment une base de F.*

Preuve. 1. : Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une telle famille et $\{w_1, ..., w_m\}$ une base de F. Utiliser le thm. de la base incomplète.

2. Soit $F' = Vect(u_1, ..., u_m)$ (où $u_i \in F$) qui vérifie $F' \subset F$ et $dim(F') = m$ par construction. Prop. précédente $\Rightarrow F' = F$.

3. Soit $\{u_1, ..., u_p\}$ une telle famille et supposons que $p < m$. On peut extraire une base de F à partir de cette famille de cardinal $< m$. Absurde.

4. Si $\{v_1, ..., v_m\}$ est liée, alors, par exemple $v_m \in Vect(v_1, ..., v_{m-1})$. Ainsi, $dim(Vect(v_1, ..., v_m)) \leq m - 1 < m$. C'est une contradiction avec $Vect(v_1, ..., v_m) = F$ et $dim(F) = m$.

Formule de Grassman

Proposition

Soient F et G des sous-espace vectoriels de $\mathbb{K}^n$.
(i) Si F et G sont en somme directe i.e. $F \cap G = \{0\}$ alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

(ii) De manière générale on a la formule de Grassman :

$$\boxed{\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.}$$

Corollaire

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ admet un supplémentaire, et si F et G sont supplémentaires alors $\dim F + \dim G = n$.

Preuve de la formule de Grassman 1/3

Proposition

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration.

On considère une base de F et une base de G, notées $\{f_1, ..., f_r\}$ et $\{g_1, ..., g_s\}$ respectivement. La réunion de ces deux familles est bien génératrice de $F + G$. De plus, si

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{s} \beta_i g_i}_{\in G}$$

, alors, comme $F \cap G = \{0\}$, on a immédiatement que $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 0$ pour tout i. Ainsi, la dimension de $F \oplus G$ est bien $r + s$. $\square$

Preuve de la formule de Grassman 2/3

Proposition

Soient F et G des sous-espace vectoriels de $\mathbb{K}^n$. On a

$$\dim(F+G)+\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G.$$

Démonstration.

Soit H un supplémentaire de $F\cap G$ dans G de sorte que $G=F\cap G\oplus H$. On a

$$F+G=F\oplus H.$$

En effet, si $x\in F+G$, alors $x=y+z$ avec $y\in F$, $z\in G$. De plus, $z=u+v$ avec $u\in F\cap G$ et $v\in H$ et $x=(y+u)+v\in F+H$. Supposons $x\in F\cap H$. Alors, $x\in F\cap G$ car $x\in H$ et $H\subset G$. D'où $x=0$. Ainsi, $\dim(F+G)=\dim(F\oplus H)=\dim F+\dim H=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$ (par le résultat précédent). $\square$

Preuve de la formule de Grassman 3/3

Corollaire

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ admet un supplémentaire, et si F et G sont supplémentaires alors $\dim F + \dim G = n$.

Démonstration.

On applique le théorème de la base incomplète à une famille $\{v_1, \ldots, v_m\}$ qui est une base de l'espace F. $\square$

Exercice type : système d'équation cartésiennes

But : passer de la description d'un sev $F = Vect(v_1, ..., v_m)$ à un système d'équations $Ax = 0$: trouver A de taille (m, n)

$$x \in F \iff x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \iff Ax = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

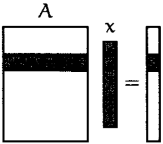


Figure – Schéma "Ligne × Colonne"

Exercice type : système d'équation cartésiennes

Exemple / méthode : dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = Vect((1,1,1);(2,1,-4))$
$\Rightarrow$ éliminer les paramètres

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ \lambda - \mu = y \\ \lambda + 4\mu = z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -3\mu = y - x \\ 2\mu = z - x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -3\mu = y - x \\ 0 = 3(z-x) + 2(y-x) \end{cases}$$

CONCLUSION : $(x,y,z) \in F \iff -5x + 2y + 3z = 0$

Exercice

Soit $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (1,1,1,3)$, $v_3 = (2,1,1,1)$, $v_4 = (-1,0,-1,2)$, $v_5 = (2,3,0,1)$. Soit $F = Vect(v_1, v_2, v_3)$ et $G = Vect(v_4, v_5)$. Calculer les dimensions de F, G, $F \cap G$, $F + G$. F et G en somme directe ?

Exercice

Soit $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (1,1,1,3)$, $v_3 = (2,1,1,1)$, $v_4 = (-1,0,-1,2)$, $v_5 = (2,3,0,1)$. Soit $F = Vect(v_1, v_2, v_3)$ et $G = Vect(v_4, v_5)$. Calculer les dimensions de F, G, $F \cap G$, $F + G$. F et G en somme directe ?

Correction : $dim(G) = 2$ et $dim(F) = 3$ (poser le système pour vérifier que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre).

Exercice

Soit $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (1,1,1,3)$, $v_3 = (2,1,1,1)$, $v_4 = (-1,0,-1,2)$, $v_5 = (2,3,0,1)$. Soit $F = Vect(v_1, v_2, v_3)$ et $G = Vect(v_4, v_5)$. Calculer les dimensions de F, G, $F \cap G$, $F + G$. F et G en somme directe ?

Correction : $dim(G) = 2$ et $dim(F) = 3$ (poser le système pour vérifier que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre). Pour $F + G$, on écrit $xv_1 + yv_2 + zv_3 + \ tv_4 = 0$:

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + z - t = 0 \\ 4x + 3y + z + 2t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ -y - 3z + 2t = 0 \\ -2y - 5z + 2t = 0 \\ -y - 7z + 6t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ -y - 3z + 2t = 0 \\ z - 2t = 0 \\ -4z + 4t = 0 \end{cases}$$

d'où $t = z = y = x = 0$ et $dim(F + G) = 4$ (noter que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$).

Exercice

Soit $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (1,1,1,3)$, $v_3 = (2,1,1,1)$, $v_4 = (-1,0,-1,2)$, $v_5 = (2,3,0,1)$. Soit $F = Vect(v_1, v_2, v_3)$ et $G = Vect(v_4, v_5)$. Calculer les dimensions de F, G, $F \cap G$, $F + G$. F et G en somme directe ?

Correction : $dim(G) = 2$ et $dim(F) = 3$ (poser le système pour vérifier que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre). Pour $F + G$, on écrit $xv_1 + yv_2 + zv_3 + \ tv_4 = 0$:

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + z - t = 0 \\ 4x + 3y + z + 2t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ -y - 3z + 2t = 0 \\ -2y - 5z + 2t = 0 \\ -y - 7z + 6t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ -y - 3z + 2t = 0 \\ z - 2t = 0 \\ -4z + 4t = 0 \end{cases}$$

d'où $t = z = y = x = 0$ et $dim(F + G) = 4$ (noter que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$). Finalement :

$$dim(F \cap G) = dim(F) + dim(G) - dim(F + G) = 1$$

Liberté de $\{v_1, v_2, v_3\}$

$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \Rightarrow$

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ 2a+b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ 4a+3b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+2c=0 \\ -b-3c=0 \\ -2b-5c=0 \\ 4a+3b+c=0 \end{cases}$$

...(relativement facile à montrer que $a = b = c = 0$). Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

Inversion des matrices $(2,2)$

Pour $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible dans $M_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(M) := ad - bc \neq 0$. Si tel est le cas, on a

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inversion des matrices $(2,2)$

Pour $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible dans $M_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(M) := ad - bc \neq 0$. Si tel est le cas, on a

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On suppose a ou c non nul, par exemple a non nul (sinon, M pas inversible).

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ (d - bc/a)x_2 = y_2 - (c/a)y_1 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{ay_2 - cy_1}{ad - bc} \quad x_1 = \frac{1}{a}\left(y_1 - b\frac{ay_2 - cy_1}{ad - bc}\right) = \frac{dy_1 - by_2}{ad - bc}$$

Exercice

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Soit $det(A) := ad - bc$. Montrer que

$$A^2 - Tr(A)A + det(A)I_2 = 0$$

(faire le calcul tranquillement : pas de difficultés)