Chapitre 5 : déterminant d'une matrice carrée

Dans tout le chapitre le symbole $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. **Dans ce chapitre, on introduit le déterminant. On demande à ce que toutes les propriétés qui suivent (dans les sections suivantes) soient connus. Il s'agit d'un chapitre qui demande beaucoup de pratique.**

1 Définition du déterminant par développement (réccurence)

Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un scalaire $\det A \in \mathbb{K}$ défini par récurrence sur n. Commençons par le cas trivial $n = 1$.

Définition 1 *Pour $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ on pose $\det A = a$.*

Supposons maintenant que le déterminant soit bien défini pour toute matrice de type $(n-1, n-1)$.

Définition 2 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \{1, ..., n\}$. On appelle*

— *mineur (i, j) de A le scalaire*

$$\Delta_{ij}(A) = \det \tilde{A}$$

où la matrice $\tilde{A}$ est obtenue à partir de A en enlevant la ligne i et la colonne j ;

— *cofacteur (i, j) de A le scalaire*

$$Cof_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A).$$

Définition 3 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Pour $i_0 \in \{1, ..., n\}$ fixé, on appelle développement du déterminant de A suivant la ligne i_0 le scalaire

$$L_{i_0}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \, Cof_{i_0,j}(A).$$

De même, pour $j_0 \in \{1, ..., n\}$ fixé, on appelle développement du déterminant de A suivant la colonne j_0 le scalaire

$$C_{j_0}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} \, Cof_{i,j_0}(A).$$

Définition 4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose*

$$\det A = L_1(A).$$

Les définitions 1 à 4 définissent sans ambiguité $\det A$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le théorème suivant permet parfois d'en simplifier le calcul.

Théorème 1 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tous $i_0, j_0 \in \{1, ..., n\}$ on a*

$$\det A = L_{i_0}(A) = C_{j_0}(A).$$

Notation. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note habituellement

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2 Propriétés

Proposition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_1, ..., A_n$ les colonnes de A et on écrit $A = (A_1, ..., A_n)$.*

1. *L'échange de deux colonnes de A multiplie le déterminant par -1.*
2. *Si C est une colonne quelconque,*
$$\det(A_1, ..., A_i + C, ..., A_n) = \det(A_1, ..., A_i, ..., A_n) + \det(A_1, ..., C, ..., A_n).$$
3. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$,*
$$\det(A_1, ..., \lambda A_i, ..., A_n) = \lambda \det(A_1, ..., A_i, ..., A_n).$$

Remarque 1
1. *Attention, si A et B sont deux matrices, en général $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.*
2. *On a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.*

Corollaire 3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Si une colonne de A est nulle, alors $\det A = 0$.*
2. *Si deux colonnes de A sont égales, alors $\det A = 0$.*
3. *Si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes alors le déterminant de A reste inchangé.*
4. *Si les colonnes de A forment une famille liée alors $\det A = 0$.*

Proposition 4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a*
$$\det A = \det A^T.$$

En conséquence, les assertions de la proposition 2 et du corollaire 3 s'appliquent aussi aux lignes.

Proposition 5 *Le déterminant d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure, en particulier diagonale) est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

3 Déterminant d'un produit, caractérisation des matrices inversibles

Théorème 6 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a*
$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Corollaire 7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas on a*
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Remarque 2 *Si $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P est inversible, on a*
$$\det(P^{-1}AP) = \det A.$$

Donc, pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $\det \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie. Cela permet de parler de déterminant d'un endomorphisme.

4 Définition du déterminant d'une matrice par les formes multi-linéaires alternées

Cette section est hors programme (cependant, c'est la manière naturelle de définir le déterminant pour récupérer toutes les propriétés voulues sur le déterminant des matrices).

On appelle σ_n l'ensemble des bijections de $\{1,...,n\}$ dans $\{1,...,n\}$. Cet ensemble est de cardinal $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Intuitivement, cet ensemble représente le nombre de façons de ranger un ensemble à n éléments. On notera σ un élément de cet ensemble (c.a.d. une bijection de $\{1,...,n\}$ dans $\{1,...,n\}$). Par ailleurs, étant donné $\sigma \in \sigma_n$, on note $\varepsilon_\sigma = (-1)^{n_\sigma}$ où n_σ est le nombre d'inversions de σ, c.a.d. le nombre de couples (i,j) de $\{1,...n\}$ tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Par exemple, pour $n = 3$, il y a 6 éléments

$$\begin{array}{cccccc} 1 \to 1 & 1 \to 2 & 1 \to 3 & 1 \to 1 & 1 \to 2 & 1 \to 3 \\ 2 \to 2 & 2 \to 1 & 2 \to 2 & 2 \to 3 & 2 \to 3 & 3 \to 2 \\ 3 \to 3 & 3 \to 3 & 3 \to 1 & 3 \to 2 & 3 \to 1 & 2 \to 1 \end{array}$$

de signature respectivement 1, -1, -1, -1, 1, 1.

Définition 5 *Soit $x_1, ..., x_n$ n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$. Le déterminant de ces n vecteurs est par définition*

$$\det_{\mathcal{E}}(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \varepsilon_\sigma x^1_{\sigma(1)} \cdots x^n_{\sigma(n)}$$

où chaque vecteur x_i est écrit $x_i = \sum_{k=1}^n x_i^k e_k$.

On admet le résultat suivant (qui découle de cette définition).

Proposition 8 *La famille $x_1, ..., x_n$ est une base de E si et seulement son si son déterminant est non nul.*

Définition 6 *Le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est par déifinition*

$$det(u) := det_{\mathcal{E}}(u(e_1), ..., u(e_n)).$$

Proposition 9 *Soit Id l'application identité de $\mathbb{K}^n$ dans lui-même et $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Alors :*

$$\det(Id) = 1 \ \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u) \ \det(v \circ u) = \det(v)\det(u)$$

et u est un isomorphisme si et seulement si $\det(u) \neq 0$.

De même on admettra ces propriétés (dont certaines découlent de la propriété précédente pour les vecteurs).

Définition 7 *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice carré de taille n. Alors, le déterminant de A est défini par :*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \varepsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$