Université d'Avignon - Faculté des Sciences
Licence de mathématiques - S5

Année 2017-2018
Algèbre générale

Epreuve de contrôle continu n°1
Durée 2h
Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Question de cours (2 points) : Soit G et G' deux groupes et, $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que l'image par f d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de G'.

Exercice 1. (5 points) Soit H l'ensemble des matrices de type $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que H muni du produit de matrices est un groupe commutatif (*indication : pensez à montrer que c'est le sous-groupe d'un groupe connu*).
(2) On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to H$ définie par
$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(H, \times)$.
(3) Montrer que les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(H, \times)$ sont isomorphes.

Exercice 2. (3 points) Soit $G = \{e, a, b, c, d\}$ un groupe d'ordre 5 d'élément neutre e.

(1) Quel est l'ordre d'un élément de G ?
(2) Le groupe G est-il monogène ? abélien ?
(3) Montrer qu'il existe un unique groupe d'ordre 5 à un isomorphisme près.

Exercice 3. (5 points) Soit $(G, .)$ un groupe dans lequel tout élément distinct de l'élément neutre est d'ordre 2. Notons e l'élément neutre du groupe $(G, .)$ et a un élément de G distinct de e. On pose $H = \{e, a\}$.

(1) Montrer que le groupe G est abélien. Donner un exemple d'un tel groupe d'ordre > 2.
(2) Vérifier que H est un sous-groupe de G d'ordre 2.
(3) Montrer que l'ensemble quotient G/H muni de la loi $\bar{x} * \bar{y} = \overline{x.y}$ est un groupe. Déterminer son neutre et montrer que tout élément de G/H distinct du neutre est d'ordre 2.
(4) *Question bonus (+2 points)* : En déduire que si l'ordre de G est fini $\geqslant 2$, il est une puissance de 2.

Exercice 4. (5 points)

(1) Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ est cyclique et déterminer tous ses générateurs.
(2) Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$. Justifiez bien votre réponse en utilisant les théorèmes du cours.
(3) La classe d'équivalence de 3 modulo 8 est-elle inversible pour le produit ? Si oui déterminer son inverse. Même question pour la classe d'équivalence de 4 modulo 8.
(4) On considère le groupe produit $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3$ muni de l'addition encore notée + :
$$(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}, \widetilde{x_3}) + (\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \widetilde{y_3}) = (\widetilde{x_1 + y_1}, \widetilde{x_2 + y_2}, \widetilde{x_3 + y_3}).$$
Pourquoi les groupes additifs $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ne sont-ils pas isomorphes ?