Algèbre générale 1 2020-21 ①

CC1 corrigé succinct

Ex 1

1) Montrons que $H_3(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$:

- $I_3 \in H_3(\mathbb{R})$
- Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$

$$MM' = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$$

et $$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -c+ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3(\mathbb{R})$$

2) $\phi : \mathbb{R} \hookrightarrow H_3(\mathbb{R})$, $a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\psi : \mathbb{R} \hookrightarrow H_3(\mathbb{R})$, $b \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\varphi : \mathbb{R} \hookrightarrow H_3(\mathbb{R})$, $c \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 2

1) $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $x \longmapsto e^{ix}$ $\qquad \phi(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = \phi(x)\phi(y)$

2) $x \in \ker\phi \iff \phi(x) = 1 \iff e^{ix} = 1 \iff x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ donc $\ker\phi = 2\pi\mathbb{Z}$

Im $\phi = \mathbb{U}$

3) $\Psi : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $x \longmapsto e^{ix}$ est une bijection, il suffit alors de transporter la loi sur $\mathbb{U}$ en posant $\forall x, y \in [0, 2\pi[$, $x \tilde{+} y = \Psi^{-1}(e^{ix}e^{iy})$

$$= \begin{cases} x+y & \text{si } x+y < 2\pi \\ x+y-2\pi & \text{si } x+y \geqslant 2\pi \end{cases}$$

Exercice 3

–1. L'associativité se vérifie à la main. L'élément neutre est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse d'une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est tout simplement

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Astuce : $ad - bc$ étant un élément non-nul de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il est forçément égal à 1. De plus, pour tout x dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a $-x = x$, donc on peut aussi écrire l'inverse comme étant :

$$\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

–2. Il y a $2^4 = 16$ matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour que $ad - bc = ad + bc$ soit non-nul, il faut qu'au moins deux des coefficients soient non-nuls. On vérifie à la main quand le déterminant est (non-)nul, on obtient la liste :

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

G est donc d'ordre 6.

–3. On regarde la première puissance non-nulle qui devient égale à id.

Pour id, l'ordre est 1. Pour g_1 : $g_1^2 = id$, donc ordre 2 ; de même pour g_2 qui est d'ordre 2. Pour g_3 : $g_3^2 = g_5$ et $g_3^3 = id$, donc g_3 est d'ordre 3 ; calcul similaire pour g_5 qui est d'ordre 3, et enfin g_4 est d'ordre 2.

–4. G n'est pas cyclique puisqu'il n'y a aucun élément d'ordre 6. Par ailleurs, tout sous-groupe H de G, différent de G est de cardinal 1, 2 ou 3 (puisque $\mid H \mid$ doit diviser $\mid G \mid$).

2 et 3 sont des nombres premiers, or pour tout g dans H *non-trivial*, le sous-groupe engendré par g doit diviser ce nombre premier tout en étant > 1, donc $\langle g \rangle$ est de cardinal $\mid H \mid$ donc égal à H.

–5. Il suffit de lister selon le générateur. On obtient les sous-groupes :

(1) $\{id\}$,

(2) $\langle g_1 \rangle = \{id, g_1\}$,

(3) $\langle g_2 \rangle = \{id, g_2\}$,

(4) $\langle g_4 \rangle = \{id, g_4\}$,

(5) $\langle g_3 \rangle = \{id, g_3, g_5\} = \langle g_5 \rangle$,