Licence de mathématiques S5 — Algèbre générale 1
Université d'Avignon — Année 2021-22

Feuille d'exercices n°1 - Groupes - Sous-groupes

Exercice 1 : (1) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la loi de composition interne sur $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x * y = ax + by + c$. Quelles sont les conditions sur a, b, c pour que $\mathbb{R}$ muni de la loi $*$ admette un élément neutre ? soit un groupe ?
(2) Soit $G =]0,1[\cup]1,+\infty[$ muni de la loi $x * y = x^{\ln y}$. Est-ce que $(G, *)$ est un groupe ? abélien ?

Exercice 2 : Soit G l'ensemble des applications bijections affines de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les applications $f_{a,b}$: $x \mapsto ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b \in \mathbb{R}$. $(G, \circ)$ est-il un groupe ? commutatif ?

Exercice 3 : Soit G un groupe d'ordre 4, d'élément neutre e.

(1) On suppose dans cette question qu'il existe un élément x de G tel que $x^2 \neq e$; x^2 est noté y, et on note z le quatrième élément de G. Déterminer la table de Cayley de G.

(2) On suppose à l'inverse que le carré de tout élément de G est e, et on note x, y, z les éléments de G distincts de e. Déterminer la table de Cayley de G.

(3) En déduire que tout groupe d'ordre 4 est commutatif.

Exercice 4 : Soit G un groupe d'élément neutre e et a un élément donné de G. On considère dans le groupe G le système suivant, d'inconnues x et y :

$$(S)\begin{cases} x^2 = e \\ y^3 = e \\ xy = yx = a \end{cases}$$

(1) Montrer que si (x, y) vérifie (S), alors a commute avec x et avec y.

(2) Montrer que si $a^6 \neq e$, alors (S) n'a pas de solution.

(3) On suppose $a^6 = e$. Résoudre (S).

Exercice 5 : On rappelle que $\mathcal{S}_n$ désigne le n-ième groupe symétrique de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{S}_3$ contient six éléments, et décrire chacun de ces éléments. Etablir la table de Cayley de S_3.

(2) Quel est l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$? de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

(3) Déterminer tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_3$.

Exercice 6 : Montrer que H l'ensemble des matrices de type $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}^\star$ est un groupe multiplicatif. Est-ce un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$?

Exercice 7 : Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ tel que $G \neq \{0\}$.

(1) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ admet une borne inférieure, que l'on notera a.

(2) Supposons que $a > 0$. Montrer que $a \in G$ *(on pourra raisonner par l'absurde)*. En déduire que $G = a\mathbb{Z}$.

(3) Supposons que $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tous réels $x < y$, il existe $g \in G$ tel que $x < g < y$.

Exercice 8 :

Soit H_8 l'ensemble des 8 matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que H_8 est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ (on établira la table de Cayley de H_8). Est-il abélien ?

(2) Donner les sous-groupes de H_8.

(3) Montrer que H_8 est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 : Soit $H = \langle a \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n.

(1) Montrer que a^m est un générateur de H si et seulement si m est premier avec n.

(2) Quel est le nombre de générateurs de H pour $n = 36$? Donner la liste de tous les générateurs de H.

Exercice 10 : Soit G le groupe $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ et $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ la surjection canonique.

(1) Montrer que si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}, +)$ alors $\sigma^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ contenant $36\mathbb{Z}$.

(2) Déterminer tous les sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$

(3) Donner la liste de tous les générateurs de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

(4) Quel est l'ordre du sous-groupe engendré par $\overline{9}$?

Exercice 11 : Quels sont les automorphismes de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$? Quels sont les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$? ($n \in \mathbb{N}^\star$)

Exercice 12 : Soit G un groupe. Pour tout $a \in G$, on définit l'application $\varphi_a : G \to G$ par

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}.$$

(1) Vérifier que φ_a est un automorphisme de G.

(2) On pose $H = \{\varphi_a : a \in G\}$. Montrer que H est un sous-groupe du groupe des permutations $\mathcal{S}(G)$.

(3) Soit $\Psi : G \to \mathcal{S}(G)$ l'application définie par $\Psi : a \mapsto \varphi_a$. Vérifier que Ψ est un morphisme de groupes.

(4) Notons $Z(G)$ le centre de G :

$$Z(G) = \{y \in G \mid \forall x \in G,\ xy = yx\}.$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que $G/Z(G)$ est un groupe isomorphe à H.