Ex 1 :

1) $189 \wedge 255 = 3$

2) $(x,y) \in \{ (27 + 85k, -20 - 63k),\ k \in \mathbb{Z} \}$

Ex 2 :

1) $X^k \mathbb{Z}[X] = \{ X^k P,\ P \in \mathbb{Z}[X] \}$

Si $k=0$ $X^k \mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[X]$

Si $k \in \mathbb{N}^*$ $X^k \mathbb{Z}[X] = \{ P \in \mathbb{Z}[X] \text{ tq } val(P) \geq k \}$

$= \{ P \in \mathbb{Z}[X] \text{ tq } P(0) = \dots = P^{(k)}(0) = 0 \}$

2)
- Si $P = 1$ on a $P'(0) = 0 \in 2\mathbb{Z}$ donc $1 \in A$
- Si $P, Q \in A$ on a $(P-Q)'(0) = \underbrace{P'(0)}_{\in 2\mathbb{Z}} - \underbrace{Q'(0)}_{\in 2\mathbb{Z}} \in 2\mathbb{Z}$ donc $P-Q \in A$
- ———— $(PQ)'(0) = \underbrace{P'(0)}_{\in 2\mathbb{Z}} \underbrace{Q(0)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{P(0)}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{Q'(0)}_{\in 2\mathbb{Z}} \in 2\mathbb{Z}$ donc $PQ \in A$

3)
- Si $P = 0$ on a $P(0) = 0$ donc $0 \in I$
- Si $P, Q \in I$ on a $(P+Q)(0) = P(0) + Q(0) = 0 + 0 = 0$ donc $P+Q \in I$
- Si $P \in I$ et $Q \in A$, $(PQ)(0) = P(0)Q(0) = 0\,Q(0) = 0$ donc $PQ \in I$

Si I est principal $I = PA$ avec $P \in I \subset A$

en particulier $P(0) = 0$ et $P'(0) \in 2\mathbb{Z}$

comme $2X \in I$ alors $P / 2X$ donc $P \in \{ \pm 1, \pm 2, \pm X, \pm 2X \}$

- Si $P = \pm 1$ alors $I = A$ or $1 \notin I$
- Si $P = \pm 2$ alors $I = 2A$ or $2 \notin I$
- Si $P = \pm X$ alors $P'(0) \notin 2\mathbb{Z}$
- Si $P = \pm 2X$ alors $I = 2XA$ or $X^2 \in I$ et $X^2 \notin 2XA$

Rem: $I = \{ P \in \mathbb{Z}[X] \text{ tq } P(0) = 0 \text{ et } P'(0) \in 2\mathbb{Z} \}$

$= 2X\mathbb{Z} + X^2 \mathbb{Z}[X]$

Ex 3 : TD ex 7