Contrôle continu n° 2

Durée 1h20

Documents, calculatrices, téléphones et smartphones interdits.

Une rédaction précise et concise sera récompensée.

Exercice 1. Les sous-ensembles suivant de l'anneau $\mathbb{C}$ des nombres complexes sont-ils des sous-anneaux :
(a) A=$\{m+n\sqrt{5}; m,n \in \mathbb{Z}\}$; **(1p)**
(b) B=$\{m+n\sqrt[3]{5}; m,n \in \mathbb{Z}\}$; **(2p)**

Exercice 2. Déterminer le sous-anneau A puis le sous-corps K de $\mathbb{C}$ engendré par i (on donnera l'expression la plus simple possible de leurs éléments). **(2p)**
Quels sont les éléments inversibles de A ? **(1p)**

Exercice 3. On considère l'application $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ qui à n associe le reste de la divivion de n par 12.
(1) ϕ est-il un morphisme de groupes ? d'anneaux ? (justifier) **(1.5p)**
(2) ϕ est-il injectif ? surjectif ? **(0.5p)**
(3) Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$? **(0.5p)**
(4) Si I est un idéal de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, que dire de son image réciproque $\phi^{-1}(I)$? **(0.5p)**
(5) Justifier que $I = \phi(\phi^{-1}(I))$. **(1p)**
(6) En déduire les idéaux de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. **(2p)**

Exercice 4. Soit A l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. On note $+$ et $\times$ les opérations usuelles d'addition et multiplication des fonctions réelles.

(1) Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau. **(1.5p)**

(2) A est-il commutatif ? **(0.5p)**

(3) A est-il intègre ? (on pourra utiliser des fonctions continues défines par morceau) **(2p)**

(4) Quels sont les éléments inversibles de A ? **(1p)**

(5) Soit B un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble :
$$I(B) := \{f \in A \mid \forall x \in B,\ f(x) = 0\}$$
est un idéal de A. **(1p)**

(6) On suppose que B est non vide et différent de $\mathbb{R}$. Montrer que $I(B)$ n'est pas de la forme $gA = \{gf \mid f \in A\}$ pour un g dans A (on pourra raisonner par l'absurde et considérer la racine cubique de g). **(2p)**