Université d'Avignon - Faculté des sciences Année 2020-2021
L3-S5 Algèbre générale 1

Contrôle continu n° 3

Durée 1h20

Tous documents, calculatrices, téléphones interdits.
Une rédaction précise et concise sera récompensée.
Toute réponse non justifiée ne sera pas comptabilisée.

Exercice 1

1. Rappeler le théorème des restes Chinois. **(1p)**
2. Justifier (sans le résoudre) que le système

$$(S)\begin{cases} x \equiv 3\ [11] \\ x \equiv 4\ [15] \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$. A-t-on unicité ? **(1p+0.5p)**

3. Trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $11u + 15v = 1$ et résoudre le système (S) dans $\mathbb{Z}$. **(2p)**

Exercice 2

On considère le sous-anneau de $\mathbb{C}$ définit par

$$A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5}\,; a, b \in \mathbb{Z}\}$$

1. Rappeller la définition d'élément premier et celle d'élément irréductible dans A. **(0.5p+0.5p)**
2. Montrer que 3 est irréductible dans A (on pourra utiliser l'application de A dans $\mathbb{Z}$ qui à z associe $|z|^2$). **(2p)**
3. Montrer que 3 n'est pas premier dans A (on pourra utiliser l'égalité $(2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5}) = 9$). **(2p)**

Tournez SVP»»

Exercice 3

Cet exercice peut etre réalisé avec très peu de calculs (il faudra bien entendu justifier les réponses)

A) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^7$ admettant une base dans laquelle sa matrice est

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le polynôme caractéristique de u ? **(0.5p)** le polynôme minimal de u ? **(1p)**
2. Discuter, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, de la dimension de $\ker[(u - \lambda\, Id_{\mathbb{C}^7})^n]$. **(3p)**
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, expliciter J^n et $\exp(tJ)$. **(1p+1p)**

B) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{C}^7$ vérifiant :

$\dim \ker(v - 2\, Id_{\mathbb{C}^7}) = 2,$
$\dim \ker[(v - 2\, Id_{\mathbb{C}^7})^2] = 3,$
$\dim \ker(v - 3\, Id_{\mathbb{C}^7}) = 2,$
$\dim \ker[(v - 3\, Id_{\mathbb{C}^7})^2] = 4.$

1. Justifier que les espaces $\ker[(v - 2\, Id_{\mathbb{C}^7})^2]$ et $\ker[(v - 3\, Id_{\mathbb{C}^7})^2]$ sont en somme directe et stables par v. **(1p+1p)**
2. Comment contruire une base qui trigonalise v sous forme de Jordan et quelle sera alors la matrice de v dans cette base ? **(1p+0.5p)**
3. Quel est le polynôme caractéristique de v ? le polynôme minimal de v ? **(0.5p+0.5p)**