Méthode de réduction de Jordan.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique soit scindé en

$$P_A(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \times (X-\lambda_2)^{m_2} \times \cdots \times (X-\lambda_s)^{m_s},$$

où les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont deux à deux distinctes.

$\boxed{1}$ On considère la valeur propre λ_1. On définit

$$A_1 = A - \lambda_1 I_n.$$

▶ Si $\dim \ker A_1 = m_1$, on considère $v_1, v_2, \dots, v_{m_1}$ vecteurs propres, deux à deux distincts, relatifs à la valeur propre λ_1 et on passe au prochain terme $(X-\lambda_2)^{m_2}$.

▶ Si $\dim \ker A_1 < m_1$, on défini $k = \min\{r \in \mathbb{N}^* : \ker A_1^r = m_1\}$.

On écrit

$$\ker A_1 \underset{+r_1 \text{ vecteurs}}{\subsetneq} \ker A_1^2 \underset{+r_2 \text{ vecteurs}}{\subsetneq} \ker A_1^3 \subsetneq \cdots \underset{+r_k \text{ vecteurs}}{\subsetneq} \ker A_1^k.$$

On cherche compléter les sommes directes suivantes :

$$\ker A_1^k = \ker A_1^{k-1} \oplus \langle v_{k,1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{k,r_k} \rangle$$

$$\Big\downarrow A_1 \qquad\qquad \Big\downarrow A_1$$

Après poser $v_{k-1,1} = A v_{k,1}, \dots,$ on compt la dimension et, si nécessaire, on complète avec :

$$\ker A_1^{k-1} = \ker A_1^{k-2} \oplus \langle v_{k-1,1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{k-1,r_k} \rangle \oplus \overbrace{\langle v_{k-1,r_k+1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{k-1,r_{k-1}} \rangle}$$

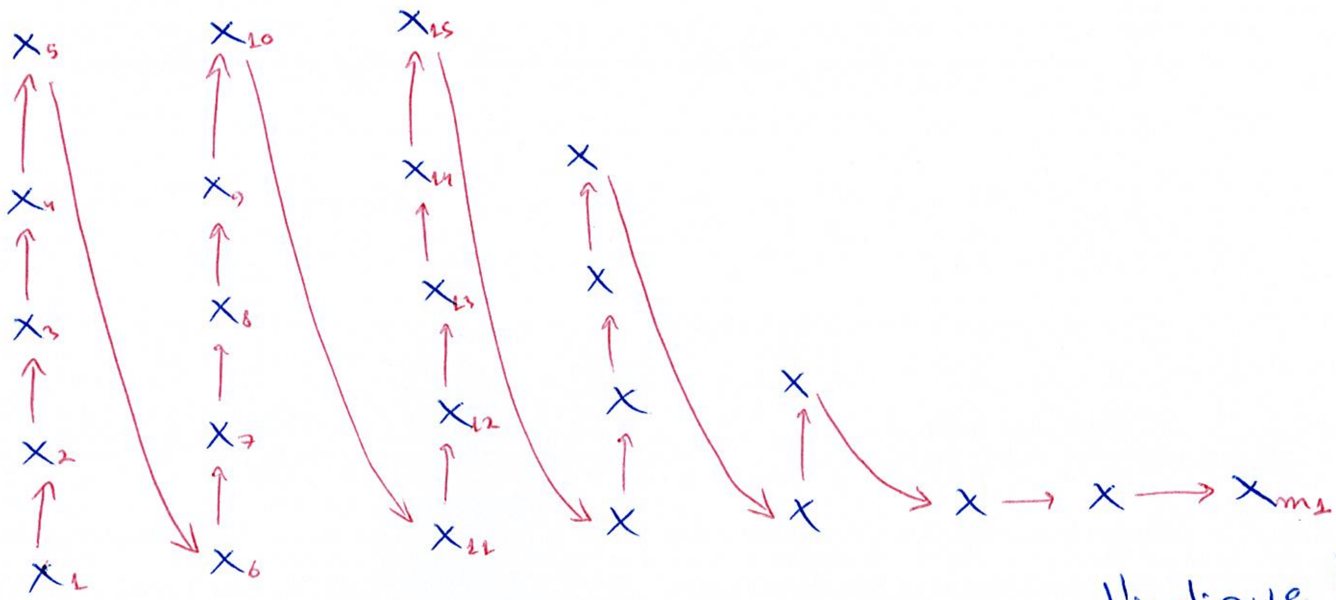
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Big\downarrow A_1 \qquad\qquad \Big\downarrow A_1$$

Similairement, on complète si nécessaire avec;

$$\ker A_1 = \langle v_{1,1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{1,r_2} \rangle \oplus \overbrace{\langle v_{1,r_2+1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{1,r_1} \rangle}$$

On a ainsi obtenu des $\overbrace{\text{vecteurs}}^{\text{en rouge}}$ organisés de la façon suivante (exemple) :



L'énumération de la base se fait comme l'indique les flèches rouges. La base du bloc de Jordan relatif à la valeur propre λ_1 est donc

$$B_1 = \{X_{1,1}, X_{1,2}, X_{1,3}, \dots, X_{1,m_1}\}.$$

- On considère les valeurs propres suivantes et on applique la même procédure. On trouve des bases

$$B_i = \{X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,m_i}\}, \quad i = 2, 3, \dots, m_s.$$

La base de Jordanisation de A est donc

$$B_{J(A)} = \left(X_{1,1}, \dots, X_{1,m_1}, X_{2,1}, X_{2,2}, \dots, X_{2,m_2}, \dots, X_{s,1}, \dots, X_{s,m_s}\right).$$

Avec cette base on obtient la matrice de passage $P_{J(A)}$ ainsi que la réduction de Jordan $J(A)$ de la matrice A.

$$A = P_{J(A)} \cdot J(A) \cdot P_{J(A)}^{-1}.$$