# Bases, dualité

*Dans ce texte, $K$ désigne un corps commutatif, d'élément unité $1 \neq 0$. Lorsque ce n'est pas précisé, $E$ désigne un $K$-espace vectoriel.*

## 1. Indépendance linéaire. Bases.

**1.1. Familles génératrices ; familles libres ; bases** Rappelons que pour tout ensemble d'indice $I$, l'ensemble $E^I$ des familles à valeurs dans $E$ est naturellement muni d'une structure de $K$-espace vectoriel, et que les familles presques nulles forment un $K$-sous espace vectoriel $E^{(I)}$.

Ceci s'applique notamment au cas $E = K$, amenant au $K$-espace vectoriel $K^{(I)}$.

Soit $\bar{x} = (x_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque, pas nécessairement presque nulle !) d'éléments de $E$. On peut alors définir l'application $\varphi : K^{(I)} \to E$ qui à une famille presque nulle de scalaires $\bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i\in I}$ associe la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i$. Cette application est $K$-linéaire. Elle est appelée **application linéaire associée à la famille $\bar{x}$.** Son image est l'ensemble $\mathrm{Vect}(\bar{x})$ des combinaisons linéaires de $\bar{x}$.

**Définition 1.1.** *On appelle **famille génératrice** (resp. **famille libre**) toute famille d'éléments de $E$ telle que l'application linéaire associée soit surjective (resp. injective). Une famille qui est à la fois libre et génératrice est appelée **base**. Une famille non-libre est dite **liée**.*

En d'autres termes :
- $\bar{x} = (x_i)_{i\in I}$ est génératrice si tout élément de $E$ est combinaison linéaire de $\bar{x}$.
- $\bar{x} = (x_i)_{i\in I}$ est liée s'il existe une famille presque nulle mais non-nulle $\bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i.x_i = 0$.
- $\bar{x} = (x_i)_{i\in I}$ est libre si pour toute famille presque nulle $\bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i\in I}$ vérifiant $\sum_{i\in I} \alpha_i.x_i$ on doit avoir $\alpha_i = 0$.
- $\bar{x} = (x_i)_{i\in I}$ est une base de $E$ si pour tout élément $x$ de $E$ il existe une et une seule famille presque nulle $\bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i.x_i = x$

**1.2. Base canonique** Le $K$-espace vectoriel $K^{(I)}$ admet une base naturelle :

**Théorème - Définition 1.2.** *La famille $\hat{\epsilon} = (\bar{\epsilon}_i)_{i\in I}$ d'éléments de $K^{(I)}$ définie par :*

$$\bar{\epsilon}_i = (\delta_{ij})_{(j\in I)} \text{ (où } \delta_{ij} \text{ désigne le symbole de Kronecker)}$$

*est une base de $K^{(I)}$, appelée **base canonique.***

On va surtout se soucier du cas où $I$ est fini, plus précisément l'ensemble des entiers compris entre 1 et $n$. Dans ce cas, $K^{(I)}$ est tout simplement $K^n$, et chaque $\bar{\epsilon}_k$ est le «vecteur» dont toutes les composantes sont nulles, sauf la $k$-ième qui vaut 1.

**1.3. Image d'une famille par une application linéaire** Soient $E$, $F$ deux $K$-evs, et $u$ une application $K$-linéaire de $E$ dans $F$. À toute famille $\bar{x} = (x_i)_{i\in I}$ on associe la famille $(u(x_i))_{i\in I}$ d'éléments de $F$, que l'on note $u(\bar{x})$.

Pour tout $(\alpha_i)_{i\in I}$ dans $K^{(I)}$ on a :

$$(\alpha_i)_{i\in I} \to^{\varphi} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i \to^{u} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.u(x_i)$$

ce qui montre que l'application linéaire associée à $u(\bar{x})$ est $\psi = u \circ \varphi$.

**Théorème 1.3.** *Soit $\bar{e} = (e_i)_{i\in I}$ une base de $E$, et $\bar{f} = (f_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque) d'éléments d'un $K$-ev $F$, indexée par le même ensemble $I$. Alors il existe une et une seule application $K$-linéaire $u$ telle que :*

$$u(\bar{e}) = \bar{f}$$

*Cette application est surjective (resp. injective) si et seulement si $\bar{f}$ est génératrice (resp. libre). En particulier, c'est un isomorphisme si et seulement si $\bar{f}$ est une base de $F$.* □

**Corollaire 1.4.** *Si $E$ admet une base $(e_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble $I$, alors $E$ est isomorphe à $K^{(I)}$.* □

D'ailleurs, à ce propos :

**Théorème 1.5** (admis)**.** *Tout $K$-espace vectoriel admet une base. Donc tout $K$-espace vectoriel est isomorphe à $K^{(I)}$ pour un ensemble $I$.* □

**Corollaire 1.6.** *Si $E$ admet une base $(e_i)_{i\in I}$, alors le $K$-espace vectoriel $\mathcal{L}_K(E,F)$ est isomorphe à $F^I$.* □

En particulier, toujours si $E$ admet une base $(e_i)_{i\in I}$, le $K$-espace vectoriel $\mathcal{L}_K(E,K)$, appelé *espace dual* de $E$, est isomorphe à $K^I$. Ainsi, si $I$ est un ensemble fini, on a $K^I = K^{(I)}$, et donc *un espace vectoriel admettant une base finie est isomorphe à son dual.*

## 2. Espaces vectoriels de dimension finie

**Définition 2.1.** *Un $K$-espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.*

### 2.1. Compléments sur l'indépendance linéaire

**Lemme 2.2.** *Une famille dans $E$ est liée si et seulement si il existe un élément de la famille qui est combinaison linéaire des autres.*

**Preuve :** Une des implications est évidente. Voyons l'autre : supposons que $(x_i)_{i\in I}$ soit une famille liée de $E$ : il existe une famille non-nulle mais presque nulle $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i=1}^n \alpha_i.x_i = 0$. Soit $k$ un indice pour lequel $\alpha_k$ est non-nul. Alors $x_k = \sum_{i\neq k} -\alpha_i(\alpha_k)^{-1}x_i$. □

**Lemme 2.3.** *Soit $\bar{e} = (e_i)_{i\in I}$ une famille dans $E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\bar{e}$ est une base,*

(2) *$\bar{e}$ est une famille génératrice minimale (aucune sous-famille propre n'est génératrice),*

(3) *$\bar{e}$ est une famille libre maximale (aucune sur-famille propre n'est libre).*

**Preuve :**

– **(1) ⇔ (2) :** Si $\bar{e}$ est une base, elle est génératrice, et aucun des $e_i$ n'est combinaison linéaire des autres, ce qui montre qu'aucune sous-famille n'est génératrice.

Inversement, supposons que $\bar{e}$ est une famille génératrice minimale. Si ce n'est pas une base, c'est qu'elle est liée, et d'après le Lemme 2.2 un des $e_i$ est combinaison linéaire des autres. On en déduit que $(e_i)_{(i\in I\setminus\{i\})}$ est une famille génératrice, ce qui contredit la minimalité supposée.

– **(1) ⇔ (3) :** Supposons que $\bar{e}$ est une base. Elle est libre, et comme elle est aussi génératrice, tout élément de $E$ est combinaison linéaire des $e_i$ : ceci montre que toute sur-famille est nécessairement liée, et donc, que $\bar{e}$ est une famille libre maximale.

Inversement, supposons que $\bar{e}$ est une famille libre maximale. Si elle n'est pas génératrice, il existe alors un élément $x$ de $E$ qui n'est pas combinaison linéaire des $e_i$. Si on adjoint ce $x$ à $\bar{e}$ on obtient une sur-famille, qui doit donc être liée. Il existe donc une famille presque-nulle $(\alpha_i)_{i\in I}$ et un scalaire $\beta$ tel que :

$$\beta.x + \sum_{i\in I} \alpha.e_i = 0$$

Comme $x$ n'est pas combinaison linéaire des $e_i$, le scalaire $\beta$ est nul, et on obtient que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est liée. Contradiction.

□

**Lemme 2.4.** *Soit $\bar{e} = (e_i)_{i\in I}$ une famille finie, de cardinal $n$, d'éléments de $E$. Alors toute famille de cardinal $n+1$ dont les éléments sont des combinaisons linéaires de $\bar{e}$ est liée.*

**Preuve :** Montrons le par récurrence sur $n$. C'est clairement vrai si $n = 1$ : si $\bar{e} = \{e_1\}$, ses combinaisons linéaires sont les multiples$\alpha.e$ ; étant donnés deux tels multiples $a = \alpha.e_1$ et $b = \beta.e_1$ on a $\beta.a + (-\alpha).b = (\beta\alpha)e_1 - (\alpha\beta)e_1 = 0$.

Supposons la propriété établie au rang $n-1$ ; et soit $a_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i.e_j$ des combinaisons linéaires des $e_j$, pour $i$ variant entre 1 et $n+1$. Si tous les $\alpha_j^n$ sont nuls, alors les $a_i$ sont en fait des combinaisons linéaires des $e_j$ pour $j \leq n-1$, et est donc liée par hypothèse de récurrence. Sinon, un d'entre eux, disons $\alpha_n^{n+1}$, est non-nul. On considère alors la famille des éléments $a'_i = a_i - \frac{\alpha_n^i}{\alpha_n^{n+1}}.a_{n+1}$ avec $1 \leq i \leq n$. Dans cette différence, le coefficient de $e_n$ est annulé, ce qui montre que les $a'_i$ forment une famille de $n$ éléments qui sont chacun combinaison linéaire des

$n-1$ premiers $e_j$. Par hypothèse de récurrence, la famille des $a'_i$ est liée : il existe des scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_n$ non tous nuls tels que :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i.a'_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i.a_i + (\sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\alpha_n^i}{\alpha_{n+1}^i}).a_{n+1}$$

La famille de tous les $a_i$ est donc liée. □

**Corollaire 2.5.** *Si $E$ est engendré par une famille à $n$ éléments, alors toute famille libre de $E$ est finie, de cardinal $\leq n$.* □

### 2.2. Le théorème de la dimension

**Théorème 2.6** (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel* ***de dimension finie,*** *$(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice finie et $J \subset I$ tel que $(e_i)_{i\in J}$ est libre. Alors, il existe une partie $L$ de $I$ telle que $J \subset L \subset I$ et telle que $(e_i)_{i\in L}$ soit une base de $E$.*

**Preuve :** Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des parties $L$ de $I$ telles que $J \subset L \subset I$ et telle que $(e_i)_{i\in L}$ soit une famille libre de $E$. Il y a dans $\mathcal{H}$ un élément $L_0$ de cardinal maximal. Alors, pour tout $i$ dans $I \backslash L_0$, la famille des $e_j$ pour $j$ parcourant l'union de $L_0$ et de $\{i\}$ doit être liée ; or, comme $(e_i)_{i\in L_0}$ est libre, ceci n'est possible que si $e_i$ est combinaison linéaire de $(e_i)_{i\in L_0}$. Donc $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in L_0})$ contient tous les $e_i$, et donc $E$ tout entier puisque $(e_i)_{i\in I}$ engendre $E$. C'est donc une famille libre et génératrice : une base de $E$. □

**Corollaire 2.7.** *Tout $K$-espace vectoriel de dimension finie admet une base.* □

**Corollaire 2.8.** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre d'éléments de $E$ et $(f_j)_{j\in J}$ une famille génératrice finie. Alors, on peut compléter $(e_i)_{i\in I}$ en une base de $E$ en ajoutant exclusivement des éléments de $(f_j)_{j\in J}$.*

**Preuve :** Appliquer le théorème de la base incomplète à la famille formée de l'union des $e_i$ et des $f_j$, indexée donc par $I \cup J$, et en prenant comme sous-ensemble d'indice $L$ la partie $I$ de $I \cup J$. □

**Théorème - Définition 2.9.** *Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $E$ admet une base ; de plus les bases de $E$ sont toutes finies et ont le même cardinal. Ce cardinal commun est la* ***dimension de*** *$E$. Il est noté $\dim E$, ou aussi $\dim_K E$.*

**Preuve :** Soient $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, $(f_j)_{1\leq j\leq m}$ deux bases de $E$. D'après le corollaire 2.5, comme $E$ est engendré par $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et que $(f_j)_{1\leq j\leq m}$ est libre, on a $m \leq n$. En inversant les rôles, on montre aussi $n \leq m$. □

**Remarque 2.10.** *Il n'y a, à isomorphisme près, qu'un seul $K$-espace vectoriel de dimension $n$ : $K^n$ (celui-ci est bien de dimension $n$ puisqu'il admet une base de cardinal $n$ : sa base canonique).*

*En particulier, le dual d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ est lui aussi de dimension finie $n$.*

**Exercice 1.** Montrer que l'espace vectoriel $K_d[X]$ de degré $\leq d$ est de dimension finie $d+1$.

## 3. Sous-espaces vectoriels, applications linéaires en dimension finie

Dans toute cette section et la suivante (sauf à la Définition 3.6), on suppose que $E$ est de dimension finie $n$.

### 3.1. Sous-espace vectoriels, espaces vectoriels quotient

**Théorème 3.1.** *Tout sev de $E$ est de dimension $\leq n$ ; le seul sev de $E$ de dimension $n$ est $E$ lui-même.*

**Preuve :** Soit $F \subset E$ un sev. D'après le Corollaire 2.5, toute famille libre de $F$ admet au plus $n$ éléments. Soit $\bar{f}$ une famille libre de $F$ de cardinal maximal $k$. D'après le Lemme 2.3 c'est une base de $F$.

Enfin, si son cardinal $k$ est égal à $n$, c'est aussi une famille libre dans $E$ maximale : c'est donc alors une base de $E$, et donc engendre $E$ ; ce qui montre l'égalité $F = E$. □

**Définition 3.2.** *Les sev de $E$ de dimension 1 sont appelés* ***droites*** *; ceux de dimension 2 sont appelés* ***plans.***

**Théorème 3.3.** *Tout sev $F$ de $E$ admet au moins un supplémentaire dans $E$ ; et pour tout supplémentaire $G$ de $F$ dans $E$ on a :*

$$\dim F + \dim G = \dim E$$

**Preuve :** Soit $(e_i)_{1\leq i\leq k}$ une base de $F$ ; d'après le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de $E$ ; $\text{Vect}(e_i)_{1\leq i\leq k}$ est alors un supplémentaire à $F$, de dimension $n-k$.

Par ailleurs, comme on l'a vu auparavant, les supplémentaires à $F$ dans $E$ sont tous isomorphes à $E/F$ ; ils ont donc tous la même dimension. □

Plus généralement :

**Théorème 3.4.** *Soient $E_1$, ... , $E_k$ une famille finie de sous-espaces vectoriels, de dimensions $n_1$, ... , $n_k$. Alors, si la somme directe $E_1\oplus...\oplus E_n$ est directe, elle est de dimension $n_1+...+n_k$.*

**Preuve :** En effet, l'union de bases de chacun des $E_i$ forme une base de $E_1\oplus...\oplus E_n$. □

On a aussi un corollaire immédiat du Théorème 3.3 (puisque tout supplémentaire est isomorphe à l'espace quotient) :

**Théorème 3.5.** *Pour tout sev $F$ de $E$ on a :*

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F$$

□

Il se peut que $E/F$ soit de dimension finie sans que $E$ soit de dimension finie :

**Définition 3.6.** *On ne suppose plus a priori que $E$ soit de dimension finie. Un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est dit* ***de codimension finie*** *si $E/F$ est de dimension finie. La dimension de $E/F$ est alors appelée* ***codimension de*** *$F$* ***;*** *elle est notée codim$F$.*

**Définition 3.7.** *Un* ***hyperplan*** *de $E$ est un sev de codimension* 1.

**3.2. Applications linéaires** Dans cette sous-section, $u$ désigne une application linéaire $u : E \to F$ entre deux $K$-ev $E$, $F$. Rappelons que nous avons convenu que $E$ est de dimension finie ; mais cette convention peut être omise dans la définition suivante :

**Définition 3.8.** *Le* ***rang*** *de $u$, noté rg $u$, est la dimension de Im $u$.*

Bien sûr, si $F$ est de dimension finie, le rang de $u$ est toujours fini. Il en est de même si $E$ est de dimension finie : en effet, l'image par $u$ d'une famille génératrice de $E$ est une famille génératrice de Im$u$.

Nous reprenons notre convention selon laquelle $E$ est de dimension finie.

D'après le théorème de décomposition canonique, Im $u$ est isomorphe au quotient $E/\ker u$. Donc d'après le Théorème 3.5 on obtient :

**Théorème 3.9.** *Pour toute application linéaire $u : E \to F$ on a :*

$$\dim \ker u + rgu = \dim E$$

□

On en déduit aisément :

**Théorème 3.10.** *Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels de même dimension (par exemple, $E = F$). Alors, une application linéaire $u : E \to F$ est injective si et seulement si elle est surjective, auquel cas c'est un isomorphisme.* □

## 4. Dualité

$E$ désigne toujours un $K$-ev, mais nous ne supposons plus dans un premier temps qu'il est de dimension finie.

**4.1. Espace vectoriel dual** Rappelons la définition de l'espace vectoriel dual de $E$ :

**Définition 4.1.** *L'espace dual d'un $K$-espace vectoriel $E$ est le $K$-espace vectoriel $\mathcal{L}_K(E,K)$. Il est noté $E^*$.*

De même que nous notons $x$ un élément typique de $E$, nous noterons $x^*$ un élément typique de $E$.

**Attention ! Celà ne signifie absolument pas que $x^*$ soit associé à un élément $x$ de $E$, par une application imaginaire $*$ entre $E$ et $E^*$, ou de toute autre manière ! Nous savons déjà que $E$ et $E^*$ sont isomorphes (si $E$ est de dimension finie), mais il n'existe pas un isomorphisme meilleur que les autres ; il faut donc vraiment penser $E$ et $E^*$ comme des espaces vectoriels isomorphes, mais pas égaux : leur lien intime est la dualité, qui est justement notre sujet d'étude.**

Pour tout $x$ dans $E$ et tout $x^*$ dans $E^*$ on note $< x^*, x >$ le résultat de l'évaluation de $x^*$ sur $x$ (c'est donc un scalaire). Le lien naturel entre $E$ et $E^*$ est :

**Théorème - Définition 4.2.** *L'application de $E^* \times E$ dans $K$ définie par $(x^*, x) \mapsto < x^*, x >$ est appelée **crochet de dualité.** C'est une application bilinéaire, ie. pour tout $x^*$ dans $E^*$, l'application de $E$ dans $K$ qui envoie $x$ sur $< x^*, x >$ est linéaire, et pour tout $x$ dans $E$, l'application de $E^*$ dans $K$ qui envoie $x^*$ sur $< x^*, x >$ est elle aussi linéaire.*

**4.2. Bidual** Puisque $E^*$ est un $K$-ev, il admet lui-aussi un $K$-espace vectoriel dual, qu'on appelle **bidual de** $E$ et qu'on note $E^{**}$.

**Théorème - Définition 4.3.** *Pour tout $x$ dans $E$, l'application $\hat{x}$ de $E^*$ vers $K$ définie par :*

$$\hat{x}(y^*) = y^*(x)$$

*est une application $K$-linéaire. C'est donc un élément du bidual $E^{**}$.*

*L'application $\psi : E \to E^{**}$ qui envoie $x$ sur $\hat{x}$ est $K$-linéaire ; on l'appelle **application linéaire canonique de** $E$ **dans** $E^{**}$.*

## 4.3. Orthogonalité

**Définition 4.4.**

(1) *$x \in E$ et $x^* \in E^*$ sont dits **orthogonaux** si $< x^*, x >= 0$.*

(2) *Plus généralement, une partie $X$ de $E$ et une partie $Y^*$ de $E^*$ sont dites **orthogonales** si tout élément de $X$ est orthogonal à tout élément de $Y^*$ ; on note alors $X \perp Y^*$.*

(3) *Pour toute partie $X$ de $E$, l'ensemble des éléments de $E^*$ orthogonaux à tous les éléments de $X$ est appelé **l'orthogonal de** $X$ et est noté $X^\perp$.*

(4) *Pour toute partie $X^*$ de $E^*$, l'ensemble des éléments de $E$ orthogonaux à tous les éléments de $X^*$ est appelé **l'orthogonal de** $X^*$ et est noté $(X^*)^\top$.*

Toutes les propriétés suivantes sont aisées à démontrer :

**Proposition 4.5.**
- *Pour toute partie $X$ de $E$, $X^\perp$ est un $K$-sev de $E^*$ (même si $X$ n'est pas un $K$-sev de $E$ !).*
- *Pour toute partie $X^*$ de $E^*$, $(X^*)^\top$ est un $K$-sev de $E$.*
- $0^\perp = E^*$, $0^\top = E$, $E^\perp = \{0\}$.
- *Pour toute partie $X$ de $E$ et toute partie $Y^*$ de $E^*$ les assertions suivantes sont équivalentes :*
  - $X \perp Y^*$
  - $X \subset (Y^*)^\top$
  - $Y^* \subset X^\perp$

□

Autres propriétés :
Soit $X$, $Y$ deux parties de $E$ :

- **Inversion de l'inclusion :** $(X \subset Y) \Rightarrow (Y^\perp \subset X^\perp)$
- **sev engendré :** $X^\perp = (\mathrm{Vect}(X))^\perp$
- **inclusion dans l'orthogonal de l'orthogonal :** $X \subset (X^\perp)^\top$

**4.4. Dualité en dimension finie** On suppose désormais que $E$ est de dimension finie $n$. Rappelons qu'alors $E^*$ est de dimension finie $n$.

*4.4.1. Base duale* Nous avons déjà insisté sur le fait qu'il n'y a pas d'isomorphisme **canonique** entre $E$ et $E^*$, c'est-à-dire, même s'il existe bien un isomorphisme entre $E$ et $E^*$, il n'y a pas un moyen naturel d'en choisir un. Ainsi, il n'y a pas de correspondance entre naturelle entre les éléments de $E$ et ceux de $E^*$.

Par contre, il y a un moyen naturel d'associer à toute base de $E$ une base de $E^*$ :

**Théorème - Définition 4.6.** *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $E$. Alors, il existe une unique base $(e_1^*, ..., e_n^*)$ de $E^*$ vérifiant :*

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \ \ < e_i^*, e_j >= \delta_{ij}$$

*Cette base est appelée **base duale de la base** $(e_1, ..., e_n)$.*

*Démonstration.* D'après le Théorème 1.3, pour tout $i$ il existe une et une seule application $K$-linéaire de $E$ vers $K$ envoyant $e_i$ sur 1 et les autres $e_j$ sur 0 : cette application est un élément de $E^*$ qu'on note $e_i^*$.

Cette famille est libre : en effet, si $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ vérifie $\sum_{i=1}^n \alpha_i.e_i^* = 0$, alors, pour tout $j$ entre 1 et $n$ :

$$\begin{aligned} 0 =< \sum_{i=1}^n \alpha_i.e_i^*, e_j > &= \sum_{i=1}^n \alpha_i < e_i^*, e_j > \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

Tous les $\alpha_j$ doivent donc être tous nuls, ce qui montre que $(e_1^*, ..., e_n^*)$ est une famille libre. Comme elle est de cardinal $n$, cette famille doit être une base. □

**Corollaire 4.7.** *Lorsque $E$ est de dimension finie, l'application linéaire canonique $\psi : E \to E^{**}$ est un $K$-isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit $x$ un élément de $\ker \psi$. Choisissons une base $(e_1, ..., e_n)$ de $E$. Alors $x$ est une combinaison linéaire de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i.e_i$. Comme $\psi(x)$ est nul, son évaluation sur tout élément $e_j^*$ de la base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$ doit être nulle :

$$\begin{aligned} 0 =< \sum_{i=1}^n \alpha_i.\psi(e_i), e_j^* > &= \sum_{i=1}^n \alpha_i < \psi(e_i), e_j^* > \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i < e_j^*, e_i > \text{ (par définition de } \psi) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} \\ &= \alpha_j \end{aligned}$$

Tous les $\alpha_j$ doivent donc être nuls, ce qui signifie que $x$ est nul.

Donc, $\ker \psi = \{0\}$ est une injection $K$-linéaire ; comme $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$, $\psi$ est un isomorphisme. □

**Corollaire 4.8.** *Toute base de $E^*$ est la base duale d'une base de $E$.*

*Démonstration.* Soit $(f_1^*, ..., f_n^*)$ une base de $E^*$. Soit $(f_1^{**}, ..., f_n^{**})$ sa base duale dans $E^{**}$, et $(e_1, ..., e_n)$ l'image de $(f_1^{**}, ..., f_n^{**})$ par l'inverse de $\psi$. Alors, pour tout $i$, $j$ :

$$\begin{aligned} < f_i^*, e_j > &= < \psi(e_j), f_i^* > \text{ (par définition de } \psi) \\ &= < f_j^{**}, f_i^* > \text{ (par définition des } e_j) \\ &= \delta_{ij} \text{ (puisque } (f_1^{**}, ..., f_n^{**}) \text{ est la base duale de } (f_1^*, ..., f_n^*)) \end{aligned}$$

Ceci montre que $(f_1^*, ..., f_n^*)$ est la base duale de $(e_1, ..., e_n)$. □

### 4.5. Dimension des orthogonaux

**Proposition 4.9.** *Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ et tout sous-espace vectoriel $G^*$ de $E^*$ on a :*

$$\begin{aligned} \dim F + \dim F^\perp = \dim E \quad &\textit{et} \quad F = (F^\perp)^\top \\ \dim G^* + \dim (G^*)^\top = \dim E \quad &\textit{et} \quad G^* = ((G^*)^\perp)^\top \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $E$ obtenue en complétant une base $(e_1, ..., e_k)$ de $F$. Soit $(e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale. Alors, les éléments de $F^\perp$ sont les combinaisons linéaires $x^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i.e_i^*$ orthogonales à toutes les combinaisons linéaires des $e_j$ pour $1 \leq j \leq k$, ce qui équivaut à ce que pour tout $1 \leq j \leq k$ :

$$0 =< \sum_{i=1}^n \alpha_i.e_i^*, e_j >= \alpha_i \delta_{ij}$$

ceci équivaut à ce que, pour tout $1 \leq j \leq k$, on ait : $\alpha_j = 0$ ; ie. que $x^*$ soit en fait combinaison linéaire des $e_i^*$ pour $k+1 \leq j \leq n$. En d'autres termes :

$$F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{k+1}^*, ..., e_n^*)$$

Donc $F^\perp$ admet une famille libre génératrice de cardinal $n - k$ : elle est donc de dimension $n - k = \dim E - \dim F$.

Soit maintenant $(e_1^*, ..., e_n^*)$ une base de $E^*$ obtenue en complétant une base $(e_1^*, ..., e_k^*)$ de $G^*$. On sait que c'est la base duale d'une base $(e_1, ..., e_n)$ de $E$ (cf. Corollaire 4.8). En raisonnant comme ci-dessus, on obtient que $(G^*)^\top$ est engendré par la famille libre $(e_{k+1}, ..., e_n)$, et est donc de dimension $n - k$.

Pour conclure, on observe qu'on sait déjà que $(F^\perp)^\top$ est un sev de $E$ contenu dans $F$ ; or, nous venons de montrer qu'il doit être de dimension $\dim F$ ; l'égalité s'en suit.

On prouve l'égalité $G^* = ((G^*)^\perp)^\top$ de manière similaire. $\square$

Ainsi, $F \leftrightarrow F^\perp$ est une correspondance biunivoque entre les espaces vectoriels de $E$ et ceux de $E^*$ ; cette bijection s'appelle **dualité**.

Remarquons en particulier :

**Corollaire 4.10.** $(E^*)^\top = \{0\}$. $\square$