CH5) Les polynômes et leurs racines

*Dans ce texte, A désigne un anneau. On le supposera toujours **intègre**. On supposera le plus souvent que c'est un corps, auquel cas on adoptera la notation K.*

Une motivation fondamentale et historique de l'algèbre en général, et l'arithmétique en particulier, est de trouver les racines des polynômes ! C'est notamment une des raisons de l'émergence du corps des nombres complexes. Cette question a des ramifications dans tous les domaines des mathématiques, notamment en analyse (par exemple, le Théorème de D'Alembert-Gauss), mais aussi en géométrie, notamment la géométrie algébrique, où il s'agit de comprendre le lieu d'annulation d'une collection de polynômes **à plusieurs indéterminées.**

1. Complément sur les racines

Dans toute section, on ne considère que l'anneau des polynômes $K[X]$ sur un corps.

1.1. Ordre de multiplicité

Théorème - Définition 1.1. *Soit P un polynôme de $K[X]$, a un élément de K et $k \geq 1$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$,*
(2) *$(X-a)^k$ divise P mais $(X-a)^{k+1}$ ne divise pas P.*

*Lorsque ces assertions sont vraies, on dit que a **est une racine de P d'ordre de multiplicité k**, ou encore, que k **est l'ordre de multiplicité de la racine a de P.***

*Si $(X-a)^p$ divise P, on dit que a **est une racine de P d'ordre (de multiplicité) au moins p.***

Démonstration.

- **(1) $\Rightarrow$ (2) :** Alors $(X-a)^k$ divise P. Soit D le quotient de la division euclidienne de Q par $X-a$: $Q = (X-a).D + Q(a)$. Donc $P = (X-a)^{k+1}.D + Q(a).(X-a)^k$. Le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^{k+1}$ est donc le polynôme de degré k non-nul $Q(a).(X-a)^k$, donc $(X-a)^{k+1}$ ne divise pas P.
- **(2) $\Rightarrow$ (1) :** Alors $P = (X-a)^k Q$, et $X-a$ ne divise pas Q. On a déjà montré qu'alors a ne peut pas être racine de Q.

$\square$

Comme $(X-a)^k$ est d'ordre k, toute racine de P est de multiplicité au plus $\deg P$, et il n'y a égalité que si $P = b.(X-a)^n$ avec $b \in K \setminus \{0\}$. Plus généralement :

Théorème 1.2. *Soit P un polynôme de $K[X]$, a_1, ... , a_r r éléments distincts de K et k_1, ... , k_r des entiers non-nul. Alors, P admet chacun des a_i comme racine d'ordre au moins k_i si et seulement si il est divisible par le produit $(X-a_1)^{k_1}...(X-a_r)^{k_r}$.*

Démonstration. Ceci découle du fait du théorème de décomposition, et du fait que comme les a_i sont distincts, les polynômes $(X-a_i)^{k_i}$ sont deux-à-deux premiers. $\square$

En fait, le théorème de décomposition montre que l'ordre d'une racine a est précisément l'entier $\nu_P(X-a_i)$ apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers.

Corollaire 1.3. *Si $P \in K[X]$ est un polynôme non-nul admettant des racines a_1, ... , a_r d'ordres rerspectifs au moins k_1, ... , k_r, alors :*

$$k_1 + ... + k_r \leq \deg P$$

$\square$

Théorème - Définition 1.4. *Soit P un polynôme de $K[X]$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- *P est constant ou admet des racines dans K dont la somme des ordres de multiplicité est $\deg P$,*
- *P est de la forme $a.(X-a_1)^{k_1}...(X-a_r)^{k_r}$ avec a, $a_i \in K$ et $k_i \in \mathbb{N}$.*

*Lorsque ces assertions sont vérifiées, on dit que P est un **polynôme scindé (sur K).*** $\square$

1.2. Ordre de multiplicité et polynôme dérivé

Proposition 1.5. *Soit P un polynôme de $K[X]$, a un élément de K et $k \geq 1$ un entier. Si a est une racine de P d'ordre de multiplicité $\geq k$, alors, pour tout entier i entre 0 et $k-1$ le polynôme dérivé $P^{(i)}$ d'ordre i admet a comme racine. Inversement, si a est racine de $P^{(i)}$ pour tout $0 \leq i < k$,* ***et que K est de caractéristique nulle,*** *a est une racine de P d'ordre de multiplicité $\geq k$.*

Démonstration.

- **Si a est racine d'ordre k:** Alors $P = (X-a)^k Q$. En dérivant on obtient $P' = k(X-a)^{k-1}Q + (X-a)^k Q'$. En itérant et en utilisant la règle de Leibniz, on voit que tous les $P^{(i)}$ pour $i < k$ est une somme de termes qui ont tous une puissance non-triviale de $(X-a)$ en facteur. D'où la conclusion.
- **Si les $P^{(i)}$ pour $i < k$ s'annulent en a et que K est de caractéristique nulle :** - Comme a est racine de $P = P^{(0)}$ on a $P = (X-a)Q_0$. En dérivant : $P' = Q_0 + (X-a)Q_0'$, d'où $Q_0(a) = 0$, et donc $Q_0 = (X-a)Q_1$ et $P = (X-a)^2 Q_1$. De proche en proche (par récurrence), on montre ainsi que pour tout $i < k$ on a $P = (X-a)^i Q_i$: en effet, une fois ceci établi pour i, on voit alors que la dérivée i-ième de P est une somme de termes ayant une puissance de $X-a$ en facteur, plus un terme égal à $i!Q_i$. Comme celui-ci s'annule en a, on a $Q_i = (X-a)Q_{i+1}$ ce qui établit la validité de la récurrence.

□

Exercice 1. Soit P le polynôme $X^3 + X$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que 1 est racine de toutes les dérivées de P, mais que 1 n'est qu'une racine double de P.

Exercice 2. Montrer que pour tout corps K, $a \in K$ est une racine d'un polynôme P de $K[X]$ d'ordre ≥ 2 si et seulement si a est racine de P et P'.

1.3. Corps algébriquement clos

Définition 1.6. *Le corps K est dit* ***algébriquement clos*** *si tout polynôme non-constant de $K[X]$ admet au moins une racine.*

Exercice 3. Montrer qu'un corps algébriquement clos est nécessairement infini (indication : penser aux polynômes de la forme $(X-a_1)...(X-a_r)+1$)

Théorème 1.7. *Un corps K est algébriquement clos si et seulement si les seuls polynômes irréductibles de $K[X]$ sont les polynômes de degré 1.*

Démonstration.

- **La condition est nécessaire :** Supposons K algébriquement clos. Tout polynôme non constant admet une racine a et est donc divisible par $X-a$. S'il n'est pas de degré 1, alors il n'est pas irréductible.
- **La condition est suffisante :** Supposons que tout polynôme irréductible est vde degré 1. Soit P un polynôme non-constant : tous les facteurs (unitaires) de sa décomposition en facteurs irréductibles sont de degré 1, et donc de la forme $X-a$. Le terme constant d'un tel facteur est alors une racine de P.

□

Corollaire 1.8. *Si K est algébriquement clos, tout polynôme de $K[X]$ est scindé.* □

Corollaire 1.9. *Si K est algébriquement clos, pour qu'un polynôme P divise un polynôme Q, il faut et il suffit que toute racine de P d'ordre de multiplicité k soit aussi racine de Q d'ordre de multiplicité au moins k.* □

1.4. Polynômes sur $\mathbb{C}$

Théorème 1.10 (Théorème de D'Alembert-Gauss, admis)**.** *Le corps des nombres complexes est algébriquement clos.* □

Et donc :

Théorème 1.11. *Tout polynôme P non-nul de $\mathbb{C}[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$P(X) = a(X-z_1)^{k_1}...(X-z_r)^{k_r}$$

Cette expression s'appelle ***décomposition de D'Alembert*** *du polynôme P.* □

Pour traiter le cas $K = \mathbb{R}$:

Théorème - Définition 1.12. *L'application σ de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même, défini par :*

$$\sigma(\sum_{i=1}^{n} a_i X^i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i X^i$$

est un automorphisme involutif de l'anneau $\mathbb{C}[X]$.

Les polynômes P et $\sigma(P)$ sont dits ***conjugués.*** *On note $\bar{P} = \sigma(P)$.* □

Remarquons que l'égalité $\bar{P} = P$ a lieu si et seulement si les coefficients de P sont réels.

1.5. Polynômes sur $\mathbb{R}$ Le point est que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut-être vu comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$! Simplement, être irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ ne signifie pas l'être dans $\mathbb{C}[X]$! (Mais l'inverse est clairement vrai).

De plus, si P est réel, on a $\sigma(P) = P$. Or, σ est un automorphisme d'anneaux, donc si $P = a(X - z_1)^{k_1}...(X - z_r)^{k_r}$ est la décomposition de D'Alembert de P, elle est aussi égale à $P = \bar{a}(X - \bar{z}_1)^{k_1}...(X - \bar{z}_r)^{k_r}$. Par unicité de la décomposition, on doit avoir $\bar{a} = a$, ie. est réel, et pour tout z_i complexe non-réel le conjugué $\bar{z}_i$ apparaît aussi comme racine de P, avec le même ordre de multiplicité. En réarrangeant les facteurs et en associant les racines conjuguées 2-à-2, on obtient :

Théorème 1.13. *Tout polynôme P non-nul de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$P(X) = a(X - x_1)^{k_1}...(X - x_r)^{k_r}(X^2 + a_1X + b_1)^{l_1}...(X^2 + a_sX + b_s)^{l_s}$$

où a et chaque a_i est un nombre réel, et chaque $X^2 + a_iX + b_i$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sans racine réelle. □

En particulier, les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (ie. de discriminant strictement négatif).

2. Relations algébriques

Nous reconsidérons à nouveau le cas où l'anneau A est un anneau (commutatif) quelconque, et non pas un corps.

2.1. Anneau des polynômes à plusieurs indéterminées

2.1.1. Définition

Définition 2.1. *Soit n un entier ≥ 1. Un* ***polynôme à n indéterminées sur*** *A est une famille presque nulle d'éléments de A indexée par $\mathbb{N}^n$. L'ensemble des polynômes à n indéterminées sur A est noté $A[X_1, ..., X_n]$*

De manière similaire à ce qui est fait pour les polynômes à une indéterminée, on note les éléments de $A[X_1, ..., X_n]$ sous la forme suivante :

$$P = \sum_{(i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,...,i_n} X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$$

étant sous-entendu que les $a_{i_1,...,i_n}$ sont nuls si la somme $i_1 + ... + i_n$ est plus grande qu'un entier N.

Le plus petit entier N pour lequel ceci est vrai est appelé **degré (total) de** P et noté $\deg P$ (lorsque P est nul, par convention : $\deg P = -\infty$).

Notations : Nous allons noter $\overrightarrow{i} = (i_1, ..., i_n)$ les éléments de $\mathbb{N}^n$, et la somme $i_1 + ... + i_n$ sera notée $\| \overrightarrow{i} \|$. On note aussi $X^{\overrightarrow{i}} := X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$.

Les polynômes de la forme $X^{\overrightarrow{i}} := X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$ sont appelés **monômes.**

Théorème - Définition 2.2. *Soient $P = \sum_{\overrightarrow{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\overrightarrow{i}} X^{\overrightarrow{i}}$, $Q = \sum_{\overrightarrow{i}\in\mathbb{N}^n} b_{\overrightarrow{i}} X^{\overrightarrow{i}}$ deux polynômes de $A[X_1, ..., X_n]$. On note $P + Q$ le polynôme $\sum_{\overrightarrow{i}\in\mathbb{N}^n}(a_{\overrightarrow{i}} + b_{\overrightarrow{i}})X^{\overrightarrow{i}}$. Pour tout entier $\overrightarrow{i} \in \mathbb{N}^n$, on définit $d_{\overrightarrow{i}} = \sum_{\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}=\overrightarrow{i}} a_{\overrightarrow{p}} b_{\overrightarrow{q}}$; alors la suite $(d_{\overrightarrow{i}})_{\overrightarrow{i}\in\mathbb{N}^n}$ est presque-nulle, donc un polynôme, qui est noté $P.Q$, et appelé produit de P et Q.*

Le triplet $(K[X_1, ..., X_n], +, .)$ est un anneau commutatif non-nul. □

Et même, dans le cas où A est un corps K, $K[X_1, ..., X_n]$ est naturellement muni d'une structure de K-espace vectoriel.

Tout polynôme s'écrit d'une unique manière comme combinaisons linéaire de monômes - dans le cas $A = K$, ceci signifie que les monômes forment une base du K-espace vectoriel $K[X_1, ..., X_n]$.

2.2. Polynômes homogènes

Définition 2.3. *Soit $p \in \mathbb{N}$. Un polynôme $P = \sum_{\overrightarrow{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\overrightarrow{i}} X^{\overrightarrow{i}}$ est p-**homogène** si tous les coefficients $a_{\overrightarrow{i}}$ avec $\| \overrightarrow{i} \| \neq p$ sont nuls.*

En d'autre terme, il s'agit d'une somme, événtuellement nulle, de monômes de degré total p. Ainsi, un polynôme p-homogène est de degré total p.

Un polynôme P est dit **homogène** s'il existe un entier p (son degré !) tel que P soit p-homogène.

La somme de deux polynômes p-homogènes est p-homogène, mais la somme de deux polynômes homogènes de degré différent n'est pas homogène !

Proposition 2.4. *Le produit d'un polynôme p-homogène par un polynôme q-homogène est $(p+q)$-homogène.* □

2.3. Plongements canoniques

Nous avons déjà remarqué que tout anneau A «se plonge» naturellement dans son anneau de polynôme $A[X]$ comme sous anneau des polynômes constants, ie. de degré 0. De la même manière, A s'identifie naturellement au sous-anneau de $A[X_1, ..., X_n]$ formé des polynômes de degré 0. Plus généralement, pour tout $k \leq n$, $A[X_1, ..., X_k]$ s'identifie au sous-anneau de $A[X_1, ..., X_n]$ formé des polynômes dont les coefficients de termes où apparaissent un X_i avec $i > k$ sont nuls.

En fait :

Théorème 2.5. *L'application de $A[X_1, ..., X_n][X] \to A[X_1, ..., X_{n+1}]$ qui envoie un polynôme $P = \sum_{i \geq 0} P_i X^i$ avec $P_i = \sum_{(i_1,...,i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1,...,i_n} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n}$ sur le polynôme :*

$$\sum_{(i_1,...,i_n,i_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}} a_{i_1,...,i_n} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n} X_{n+1}^{i_{n+1}}$$

est un isomorphisme d'anneaux. □

Ce théorème signifie qu'on peut réarranger l'écriture de P en distinguant l'indéterminée X_{n+1} - en fait, on peut aussi choisir une autre des indéterminés, obtenant un résultat analogue !

On a aussi des isomorphismes d'anneaux $K[X_1, ..., X_n] \approx K[X_1, ..., X_k][X_{k+1}, ..., X_n]$, et aussi $K[X_1, ..., X_n] \approx K[X_1][X_2]...[X_n]$.

Ainsi, si une propriété passe d'un anneau A à son anneau de polynôme $A[X]$, elle se propage aussi de A vers $A[X_1, ..., X_n]$. D'où :

Théorème 2.6. *Si A est intègre, alors $A[X_1, ..., X_n]$ est intègre, et les éléments inversibles de $A[X_1, ..., X_n]$ sont les éléments de A qui sont inversibles.* □

2.3.1. *Degré*

On a déjà défini défini le degré (total) d'un élément de $A[X_1, ..., X_n]$; on a là encore, pour tout P, Q dans $A[X_1, ..., X_n]$:

$$\deg(P+Q) \leq \sup[\deg P, \deg Q] \qquad \deg(P.Q) \leq \deg P + \deg Q$$

avec égalité dans la dernière inégalité si A est intègre.

Exercice 4. Montrer qu'effectivement cette inégalité est un égalité lorsque A est intègre (indication : montrer qu'on peut se ramener au cas où les polynômes P et Q sont homogènes).

On peut aussi définir le **degré en la variable (ou indéterminée)** X_i d'un élément P de $A[X_1, ..., X_n]$ à travers l'isomorphisme

$$A[X_1, ..., X_n] \approx A[X_1, .., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n][X]$$

On note $\deg_i P$ ce degré. Là encore :

$$\deg_i(P+Q) \leq \sup[\deg_i P, \deg_i Q] \qquad \deg_i(P.Q) \leq \deg_i P + \deg_i Q$$

avec égalité dans la dernière inégalité si A est intègre.

2.3.2. *Fonction polynômiale à plusieurs indéterminées*

Comme dans le cas à une seule indéterminée, on peut associer à tout élément $P = \sum_{(i_1,...,i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1,...,i_n} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n}$ de $A[X_1, ..., X_n]$ l'application $\widetilde{P} : A^n \to A$ qui envoie un n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ sur $\sum_{(i_1,...,i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}$. Cette application est appelée **fonction polynômiale (associée à P).**

Ceci définit un morphisme d'anneaux de $A[X_1, ..., X_n]$ vers A^{A^n}.

Théorème 2.7 (admis)**.** *Si A est un anneau intègre infini, le morphisme $P \to \widetilde{P}$ est injectif.* □

2.3.3. *Substitution* Soit P un polynôme de $A[X_1,...,X_n]$, et n polynômes Q_1, ... , Q_n de $A[Y_1,...,Y_p]$. On peut alors remplacer dans l'expression de P chaque occurence de X_i par le polynôme Q_i ; le résultat est alors un polynôme de $A[Y_1,...,Y_p]$. Cette opération s'appelle **substitution des polynômes Q_1, ... , Q_n aux indéterminées X_1, ... , X_n.**

Cette opération correspond, au niveau des fonctions polynomiales, à la composition des applications $(\widetilde{Q}_1,...,\widetilde{Q}_p) : A^p \to A^n$ et $\widetilde{P} : A^n \to A$.

Exemple 2.8. *La substitution dans $P = X_1^2 + X_2 + X_1X_2 + 7$ par $Q_1 = Y_1^2$, $Q_2 = Y_1Y_2$ est :*

$$(Y_1^2)^2 + Y_1Y_2 + (Y_1)^2(Y_1Y_2) + 7 = Y_1^4 + Y_1^3Y_2 + Y_1Y_2 + 7$$

2.3.4. *Polynômes symétriques*

Proposition 2.9. *Soit s un élément du groupe symétrique S_n (ie. une permutation de $\{1,...,n\}$). L'application de $A[X_1,...,X_n]$ dans lui-même qui envoie chaque polynôme*

$$P = P(X_1,...,X_n) = \sum_{(i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,...,i_n} X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$$

sur le polynôme :

$$s(P) = P(X_{s(1)},...,X_{s(n)}) = \sum_{(i_1,...,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,...,i_n} X_{s(1)}^{i_1}...X_{s(n)}^{i_n}$$

est un isomorphisme d'anneaux (et même d'espaces vectoriels si A est un corps).

Si s, s' sont deux éléments de S_n, on a :

$$(s \circ s')(P) = s(s'(P))$$

Enfin, si P est homogène, $s(P)$ est lui-aussi homogène. □

Définition 2.10. *Un polynôme P est* ***symétrique*** *si pour toute permutation $s \in S_n$ on a $s(P) = P$.*

Théorème - Définition 2.11. *Dans $A[X_1,...,X_n]$ les n polynômes Σ_p $(1 \leq p \leq n)$ définis par :*

$$\Sigma_p = \sum_{1\leq i_1<...<i_p\leq n} X_{i_1}...X_{i_p}$$

sont homogènes et symétriques. Ils sont appelés ***polynômes symétriques élémentaires.***

En particulier :

$$\Sigma_1 = X_1 + ... + X_n \quad \Sigma_n = X_1...X_2$$

Démonstration. Chaque Σ_p est manifestement homogène, de degré p.

Soit P le polynôme de $A[X_1,...,X_n,Y]$:

$$P = \prod_{i=1}^{n}(Y - X_i)$$

Par récurrence sur n, on montre :

$$P = Y^n + \sum_{p=1}^{n}(-1)^p\Sigma_pY^{n-p}$$

Or, pour toute permutation $s \in S_n$ on a manifestement, par commutativité du produit dans $A[X_1,...,X_n,Y]$:

$$\prod_{i=1}^{n}(Y - X_{s(i)}) = \prod_{i=1}^{n}(Y - X_i)$$

On en déduit que $s(\Sigma_p) = \Sigma_p$ pour tout p. □

Il est clair que si Q est un polynôme de $A[Y_1,...,Y_n]$, le polynôme $P \in A[X_1,...,X_n]$ obtenu en substituant dans Q les indéterminées par Σ_1, ... , Σ_n est symétrique.

Inversement :

Théorème 2.12 (admis)**.** *Tout polynôme symétrique de $A[X_1,...,X_n]$ s'obtient par substitution dans un polynôme de $A[Y_1,...,Y_n]$ des indéterminées par les polynômes symétriques élémentaires Σ_1, ... , Σ_n.*

2.4. Relations algébriques entre les racines d'un polynôme à une indéterminée Dans cette dernière section :

K **est un corps algébriquement clos.**

Définition 2.13. *Un n-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ d'éléments de K est un* ***système de racines pour un polynôme*** *P* ***de*** *$K[X]$ si on peut écrire :*

$$P = a(X - \alpha_1)...(X - \alpha_n)$$

Comme tout polynôme de $K[X]$ est scindé, tout polynôme de $K[X]$ admet un système de racines. Remarquons que les α_i ne sont pas deux-à-deux distincts ! Et remarquons aussi qu'il n'y a pas un seul système de racines (sauf si P est de la forme $a(X - \alpha)^n$), puisque pour toute permutation $s \in S_n$ le n-uplet $(s(\alpha_1), ..., s(\alpha_n))$ est lui aussi un système de racines. En fait, tout autre système de racines de P s'obtient de cette manière, en appliquant une permutation à $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Définition 2.14. *Le* ***symétrisé*** *d'un n-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ d'éléments de K est n-uplet $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ de K^n défini par $\sigma_p = \Sigma_p(\alpha_1, ..., \alpha_n))$ $(1 \leq p \leq n))$ où Σ_p désigne le polynôme symétrique élémentaire d'ordre p.*

Comme les Σ_p sont symétriques, le symétrisé ne dépend finalement pas du choix du système de racines. Et, en effet :

Théorème 2.15. *Soit P un polynôme de $K[X]$ de degré $n \geq 1$:*

$$P = a_n X^n + ... + a_{n-p} X^{n-p} + ... + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Alors, un n-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ est un système de racines de P si et seulement si son symétrisé $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ vérifie :

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, ..., \sigma_p = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n}, ..., \sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

□