Corrigé du CC2

Exercice 1. a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (comme combinaison linéaire de fonctions dérivables) et

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}.$$

On a $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$; les points critiques de f sont les solutions *dans* $]0,+\infty[$ de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$; le seul point critique de f est donc 2.

b) Lorsque x tend vers 0 (à droite), $-\ln(x)$ tend vers $+\infty$ et $\frac{2}{x}$ tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = +\infty$.

On a $f(x) = x\Big(1 - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x^2}\Big)$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\ln(x)}{x}$ et $\frac{2}{x^2}$ tendent vers 0, donc $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x^2} = 1$. On en déduit : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) $f'(x)$ a le même signe que $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$; comme $x+1 > 0$ pour $x \in]0,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $x-2$. On obtient le tableau de variation suivant.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3-\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) D'après le tableau de variation trouvé en c), la fonction f n'admet pas de maximum (local ou global); f a un minimum global, qui est atteint en 2.

Exercice 2. Par définition, $2^x = e^{x\ln(2)}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} 2^x > e^{x^2} &\iff e^{x\ln(2)} > e^{x^2} \\ &\iff \ln(2)x > x^2 \\ &\iff x(\ln(2) - x) > 0 \end{aligned}$$

Or $x(\ln(2)-x) < 0$ si $x < 0$ ou $x > \ln(2)$, $x(\ln(2)-x) = 0$ si $x = 0$ ou $x = \ln(2)$ et $x(\ln(2)-x) > 0$ si $0 < x < \ln(2)$. L'ensemble des solutions est donc : $S =]0, \ln(2)[$.

Exercice 3. a) La fonction cos étant de classe C^∞, il en est de même de g, et

$$g'(x) = 2(1+\cos x)\cos'(x) = -2(1+\cos x)\sin x\,;$$

$$g''(x) = -2\cos'(x)\sin x - 2(1+\cos x)\sin'(x) = 2(\sin x)^2 - 2(1+\cos x)\cos x\,.$$

b) La formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour la fonction g est :

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0\,.$$

Comme $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, on trouve : $g(0) = 2^2 = 4$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = -4$. D'où :

$$(1+\cos x)^2 = g(x) = 4 - 2x^2 + x^2\epsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0\,.$$

c) D'après b),

$$\frac{g(x)-4}{x^2} = \frac{-2x^2 + x^2\epsilon(x)}{x^2} = -2 + \epsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0\,.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-4}{x^2} = -2.$

Exercice 4. a) $I = \Big[\frac{(t-2)^3}{3} + \frac{t^4}{4}\Big]_1^4 = \frac{2^3}{3} + \frac{4^4}{4} - (\frac{(-1)^3}{3} + \frac{1^4}{4})$. On obtient : $I = \frac{8}{3} + 64 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 67 - \frac{1}{4} = \frac{267}{4}$.

b) La fonction $u : x \mapsto \sin(3x)$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto 3\cos(3x)$. Donc la fonction $\frac{u}{3}$ est une primitive de $x \mapsto \cos(3x)$, et
$J = \Big[\frac{\sin(3x)}{3}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\sin(3\pi/2) - \sin(0)}{3} = \frac{-1-0}{3} = -\frac{1}{3}$.

c) Posons $\varphi(s) = s^2 + 1$. On a $\varphi'(s) = 2s$, donc $s\sqrt{s^2+1} = \frac{1}{2}\varphi'(s)\varphi(s)^{1/2}$.

Ainsi la fonction $s \mapsto \frac{1}{2}\frac{\varphi(s)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $s \mapsto s\sqrt{1+s^2}$. Il vient

$$K = \Big[\frac{1}{2}\frac{\varphi(s)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 = \Big[\frac{1}{3}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 = \frac{5^{\frac{3}{2}} - 1}{3} = \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\,.$$

Remarque : on peut aussi utiliser directement la formule de changement de variable

$$K = \frac{1}{2}\int_0^2 \varphi'(s)\sqrt{\varphi(s)}\,ds = \frac{1}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}[x^{3/2}]_1^5\,.$$