UAPV - UFR STS
Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1

Année 2021/2022
Analyse 1

TD2

Exercice 1. Pour chacun des deux exemples suivants :
i) Calculer le taux d'accroissement de g entre a et $a+h$ et étudier sa limite lorsque h tend vers 0. En déduire $g'(a)$.
ii) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point M de coordonnées $(a, g(a))$.

$$\text{a)} \quad g : x \mapsto \frac{x}{x+1} \quad , \quad a = 2 \; ; \qquad \text{b)} \quad g : x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \quad , \quad a = -1 \; .$$

Exercice 2. Un puits sec a une profondeur de 30 mètres. On lâche une pierre dans ce puits à l'instant $t = 0$. Au bout de t secondes, la distance parcourue par la pierre est donnée en mètres par $d(t) = 4,9\,t^2$.

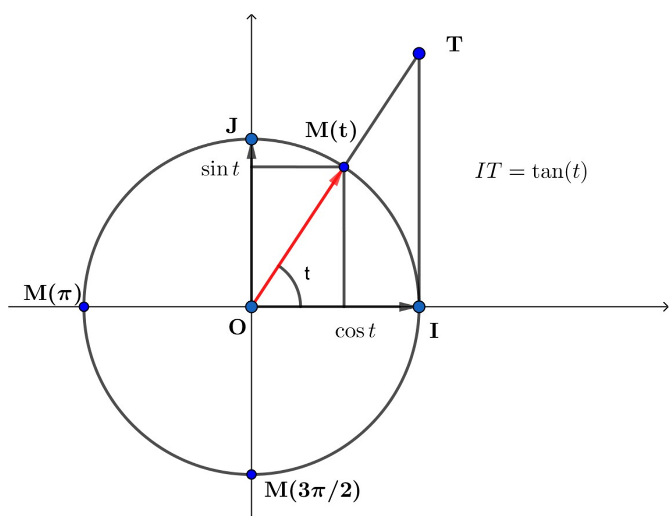
a) A quel instant t_0 la pierre touche-t-elle le fond du puits?

b) Calculer la vitesse instantanée de la pierre au moment où elle touche le fond, ainsi que sa vitesse moyenne entre l'instant où elle est lâchée et l'instant où elle touche le fond.

Exercice 3. a) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et périodique de période T. Soit $a \in \mathbb{R}$. Peut-on dire que $f'(a+T) = f'(a)$? Justifier la réponse.

b) On considère une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et paire. Soit $a \in \mathbb{R}$. Quelle relation a-t-on entre $g'(-a)$ et $g'(a)$? Même question si g est impaire.

Exercice 4. Le cercle représenté dans la figure ci-dessous est de rayon 1; l'angle t est dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.



a) Exprimer en fonction de t : i) l'aire du triangle $OIM(t)$; ii) l'aire du triangle OIT; iii) l'aire de la région du disque délimitée par les segments $[OI]$ et $[OM(t)]$ (secteur circulaire d'angle t).

b) En déduire que

$$\forall t \in]0, \pi/2[\,,\ \sin t \leq t \leq \tan t\,.$$

c) En déduire que

$$\forall t \in]0, \pi/2[\,,\ \cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1\,.$$

d) Montrer que $\lim\limits_{t \to 0, t>0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$, puis que $\lim\limits_{t \to 0, t<0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

e) En utilisant la formule $(1 - \cos t)(1 + \cos t) = (\sin t)^2$, montrer que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$. En déduire que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{t} = 0$.

Exercice 5. Trouver la dérivée de la fonction f dans les cas suivants : on donnera l'ensemble de définition de f, et celui de f'.

a. $f(t) = t \sin t$; **b.** $f(t) = (t^2 + 1)\sqrt{t} \cos t$; **c.** $f(t) = (t^3 + t)^4$; **d.** $f(t) = 1 + \dfrac{7}{t} + \dfrac{5}{t^2}$;

e. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 4}$; **f.** $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - 1)^4}{x^2 + 2}$; **g.** $f(x) = \dfrac{1}{(\sin x)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 6. Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

a. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(\cos x)$; **b.** $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^4 - 3x)$; **c.** $u : z \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{z^2 + 1}$;
d. $h : t \in] - \pi/4, \pi/4[\mapsto \tan(2t)$; **e.** $v : z \in]0, \pi^2/4[\mapsto \tan(\sqrt{z})$.

Exercice 7. Dresser le tableau de variation de f et en déterminer les extrema (dont les extrema locaux) dans les exemples suivants. On donnera l'allure des courbes représentatives des fonctions.

a. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 3x + 2$; **b.** $f : x \in [0, +\infty[\mapsto (x - 3)\sqrt{x}$.

Exercice 8. Calculer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants (en précisant l'ensemble de dérivabilité de la fonction) :

a. $f(x) = \arccos(x^2)$; **b.** $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; **c.** $f(x) = \arctan(2x + 1)$.

Exercice 9. Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}\,.$$

a) Calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.

b) Montrer que f atteint un minimum que l'on déterminera.

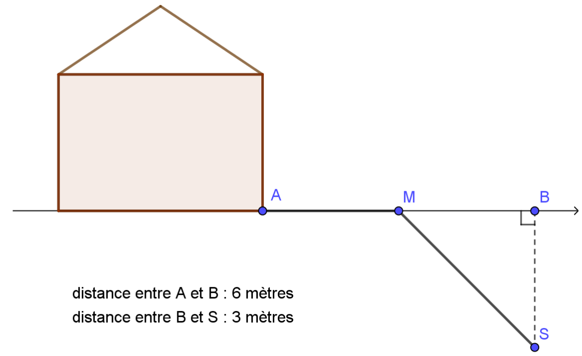
c) En déduire : $\forall x \in [0, +\infty[\,,\ (1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)$.

d) En déduire : $\forall x \in [0, +\infty[\,, \forall y \in [0, +\infty[\,,\ (x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

Exercice 10.

Une maison doit être raccordée, à partir du point A, à un réseau de gaz situé au point S, à 6 mètres de A horizontalement et à 3 mètres verticalement de B, à l'aide d'une conduite comme indiqué dans la figure ci-contre.

L'installation de la partie de la conduite située à la surface du sol coûte 300 euros par mètre alors que celle enfouie sous le sol coûte 750 euros par mètre.



a) On note x la distance MB (exprimée en mètres). A quel intervalle le réel x appartient-il? Exprimer les distances AM et MS en fonction de x.

b) Trouver l'expression (en fonction de x) du coût $f(x)$ du raccordement.

c) Où placer le point M pour rendre le coût du raccordement minimal?

Exercice 11. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$.

a) A quoi est égal $f(1)$?

b) Calculer $f'(x)$. En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.

c) Que vaut $\arctan(x) + \arctan(1/x)$ si $x \in]-\infty, 0[$?

Exercice 12. Soit $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$. Etudier les variations de f. En déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Simplifier les expressions suivantes.

a) $e^{4a+1}(e^{-a})^4$ b) $\dfrac{(e^{-a})^2 e^{3a+2}}{e^{a+3}}$ c) $e^{-3\ln 4}$ d) $\ln(25a) - 2\ln(5)$

e) $\ln(\sqrt{x}\ x^3)$ f) $\ln(a^3 - a) - \ln(a - 1)$.

Exercice 14. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $e^{2x+3} \geq 7$ b) $20 \times 10^x = 35$ c) $2^x = 3^{x-1}$ d) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$ e) $\ln(2x+1) < -2$

f) $2^x > e^{x^2}$ g) $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$

Exercice 15. On veut déterminer (avec une calculatrice) le plus petit entier n tel que $7^n > 10^{2019}$. Comment faire?

Exercice 16. Trouver les dérivées des fonctions suivantes, en précisant à chaque fois l'ensemble de dérivabilité :

a. $x \mapsto \ln(x+4)$; **b.** $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$; **c.** $x \in]1,+\infty[\mapsto \ln(\ln(x))$; **d.** $x \mapsto \ln(\cos x)$

e. $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$; **f.** $x \mapsto e^{\sin x}$; **g.** $x \mapsto (\sqrt{2})^x$; **h.** $x \mapsto (x^4+2)^{\sqrt{3}}$.

Exercice 17. a) On suppose que les fonctions f et g sont dérivables en un point $a \in \mathbb{R}$, et que $g'(a) \neq 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

b) Application. Déterminer les limites suivantes.

$$i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{\sin(3x)} \qquad ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{\ln(1+x)} \qquad iii) \quad \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt{x}-1}$$

Exercice 18. Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. a) Les fonctions sh, ch sont-elles paires? impaires? ni l'un ni l'autre?

b) Simplifier $(\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2$. En déduire une expression de $\mathrm{ch}(x)$ en fonction de $\mathrm{sh}(x)$.

c) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$

2. a) Calculer $sh'(x)$ et $ch'(x)$. Tracer les tableaux de variation des fonctions sh et ch.

b) Justifier que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque. Justifier que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

c) Justifier que la restriction de ch à $[0,+\infty[$ est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. On note argch : $[1,+\infty[\to [0,+\infty[$ la bijection réciproque. Justifier que argch est dérivable en tout $x \in]1,+\infty[$ et calculer $\mathrm{argch}'(x)$.

Exercice 19. a) Ecrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions $f : x \mapsto e^{x/2}$ et $g : x \mapsto (1+x)^{1/2}$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{x^2}$.

Exercice 20. Déterminer les limites suivantes.

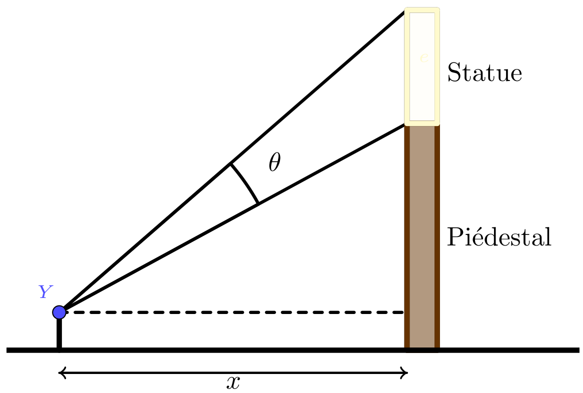
$$a) \ \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1-x) + x(x+2)}{x^3} \qquad b) \ \lim_{x\to 1} \frac{x^{2,5} + 1,5 - 2,5x}{(x-1)^2}$$

On utilisera la formule de Taylor-Young, appliquée aux fonctions $x \mapsto \ln(1-x)$ (en 0) et $x \mapsto x^{2,5}$ (en 1) pour trouver ces limites.

TD2 : EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

Exercice 21. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ soit dérivable en 1.

Exercice 22. Une statue haute de 9 mètres se trouve sur un piédestal haut de 17, 60 mètres. Un visiteur, dont les yeux sont situés à 1, 60 mètre du sol, souhaite voir la statue sous l'angle le plus grand possible. Il se demande à quelle distance x du piédestal il doit se placer.



Sur le schéma ci-contre, les yeux du visiteur sont en Y.

a) Trouver une expression de θ, l'angle sous lequel le visiteur voit la statue, en fonction de x (on utilisera la fonction arc tangente).

b) Déterminer la valeur de x pour laquelle θ est maximal.

Exercice 23. On définit la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x) + \dfrac{2}{x}$.

a) Calculer $f'(x)$ et déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.

b) Déterminer les limites de f en 0 (à droite) et en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) La fonction f admet-elle un minimum global? un maximum global? Si oui, dire où cet extremum est atteint.

Exercice 24. 1. a) Soit a un réel. Déterminer tous les réels y tels que $\dfrac{1}{2}(y - \dfrac{1}{y}) = a$.

b) Résoudre l'équation (d'inconnue x) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = a$.

c) En déduire une expression de $\operatorname{argsh}(x)$ (défini dans l'exercice 18) utilisant la fonction ln.

Exercice 25. Etant donné deux fonctions deux fois dérivables $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, déterminer $(g \circ f)''(x)$.

Exercice 26. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 + \cos x)^2$.

a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$; on rappelle que g'' désigne la dérivée seconde de g.

b) Ecrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour la fonction g.

c) En déduire la limite de $\dfrac{g(x) - 4}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.