Feuille TD 1

Exercice 21

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

(a) domain de f $= \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(b) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$$= f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)} = 1 - \frac{1}{x}$$

(c) $(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$

$$= f\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)} = x$$

Exercice 22

(a) $$x^3 - 3x^2 + x = x(x^2 - 3x + 1)$$

$$= x(x-\alpha)(x-\beta)$$

avec $$\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

(b) $$2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x+1)(2x-1)$$

Explication : on voit que $x = 1$ est une racine de ce polynôme. Donc

$$2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

On déduit que $a = 2$

$b = 1$

$c = -1$

Ensuite on factorise $2x^2 + x - 1 = (x+1)(2x-1)$

(c) Pour trouver le domaine de

$$x \longmapsto \sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1}$$

il faut résoudre

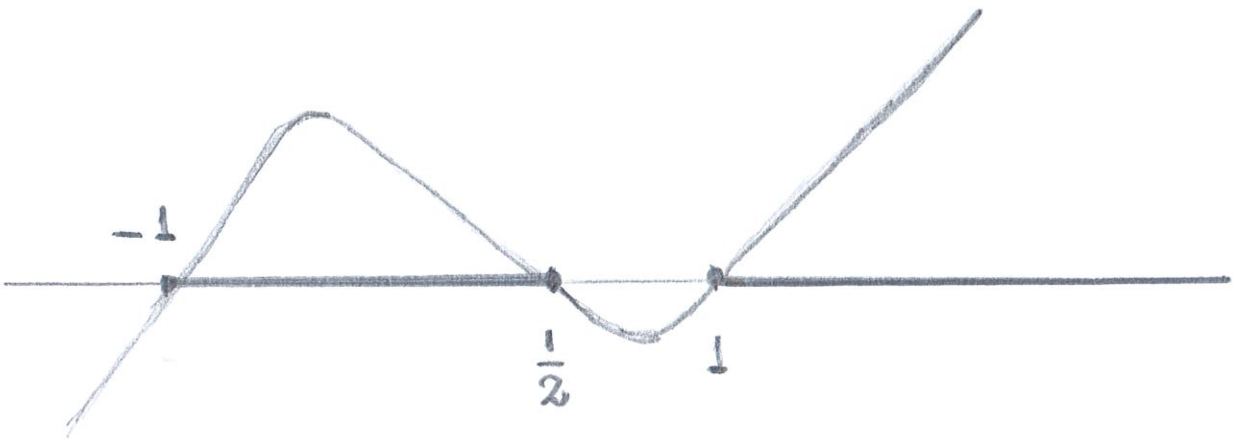
$$2x^3 - x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

c.-à-d.,

$$(x-1)(x+1)(2x-1) \geqslant 0$$

c.-à-d.,

$$2(x-1)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$$



Donc

$$x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty[$$

Exercice 23 Nous devons calculer

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}}_{f(x)}$$

Notons que

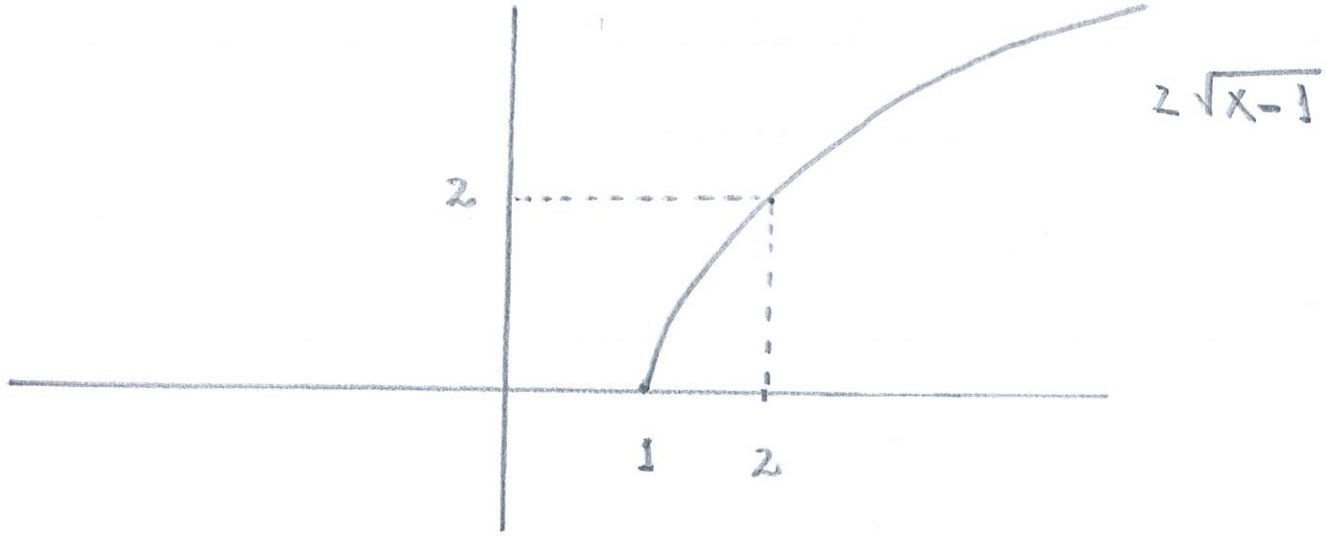
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}}$$

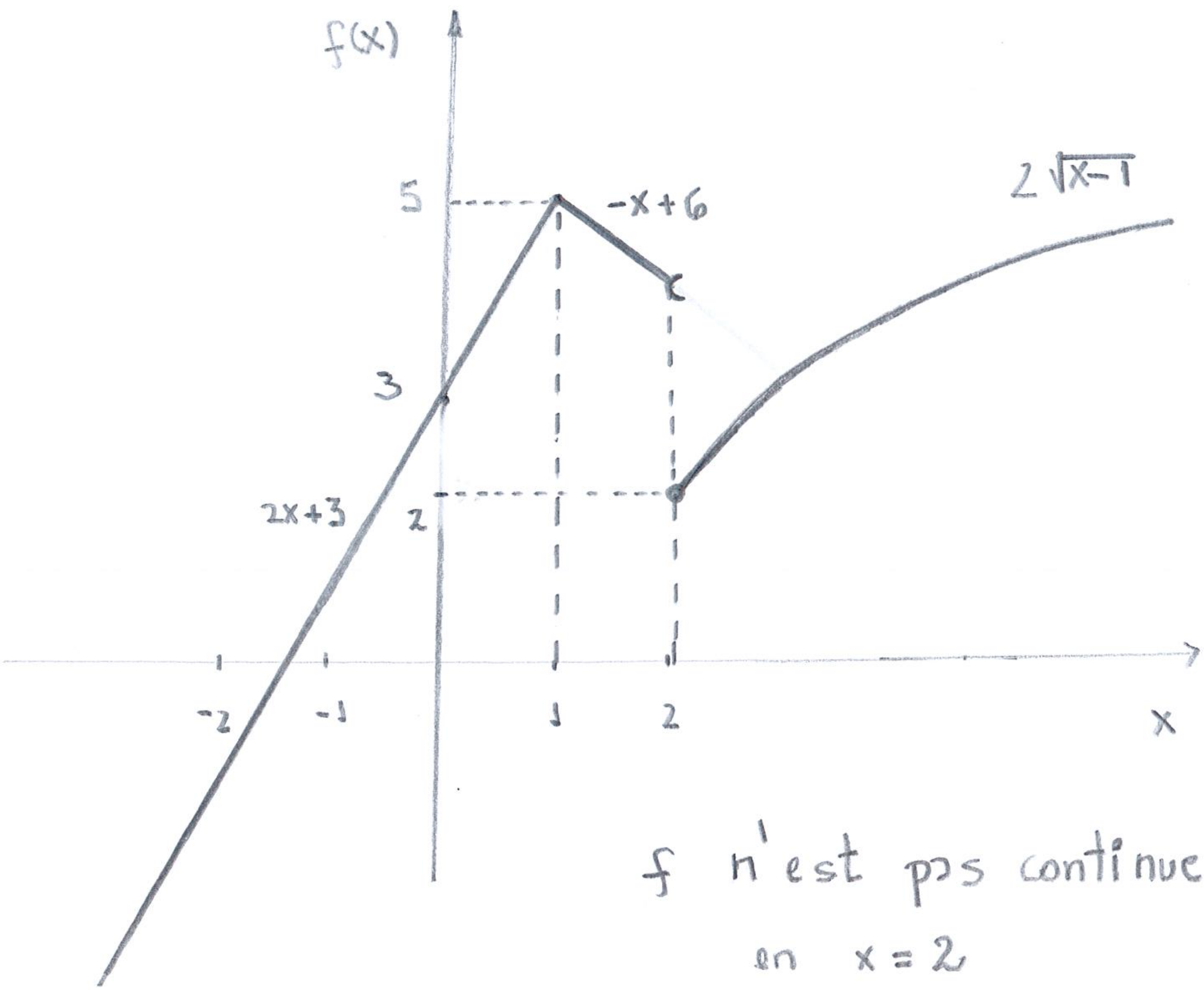
$$= \frac{(x+1) - (1-x)}{x\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}}$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Exercice 24





f n'est pas continue en $x = 2$

Exercice 25

$$f(t) = \arccos(\cos(2t))$$

(a) $f(-t) = \arccos(\cos(-2t))$

$= \arccos(\cos(2t))$

$= f(t)$

Donc $\boxed{f \text{ est paire}}$

$\cos t \longrightarrow 2\pi$ - périodique

$\cos(2t) \longrightarrow \pi$ - périodique

Donc

$\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique}}$

En effet,

$f(t+\pi) = \arccos(\cos(2(t+\pi)))$

$= \arccos(\cos(2t+2\pi))$

$= \arccos(\cos(2t)) = f(t)$

(b) Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Donc $2t \in [0, \pi]$

Notons que

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \\ \arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \\ \text{sont des fonctions réciproques} \end{array}}$$

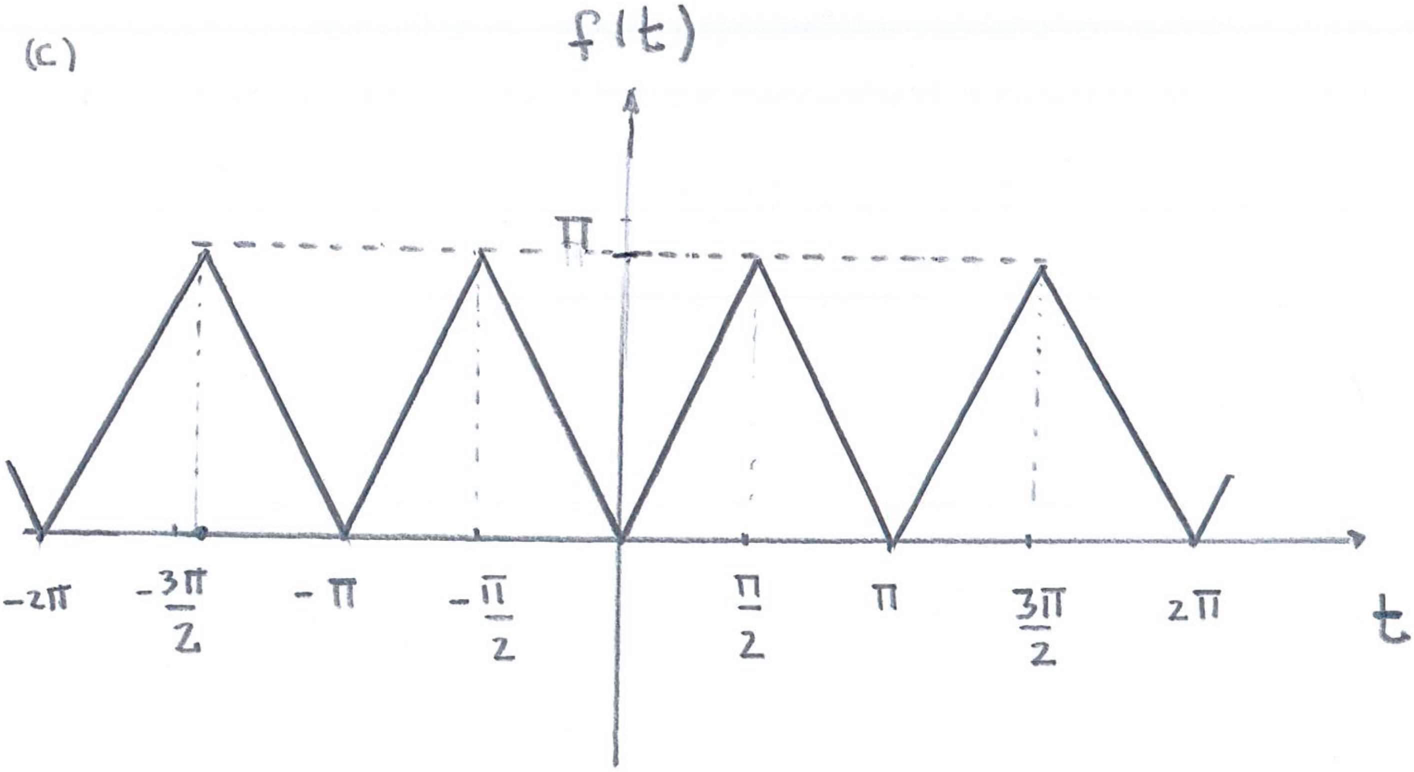
Donc

$$\arccos(\cos x) = x \qquad \forall x \in [0,\pi]$$

et

$$f(t) = \arccos(\cos(2t)) = 2t \qquad \forall t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

(c)



Exercice 26

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^2+1) = \infty$$

Notons que

$x \longmapsto 2x$ est strictement croissant sur $]-\infty, 1]$

$x \longmapsto x^2+1$ est strictement croissant sur $]1, \infty[$

$$2 \times 1 = (1)^2 + 1$$

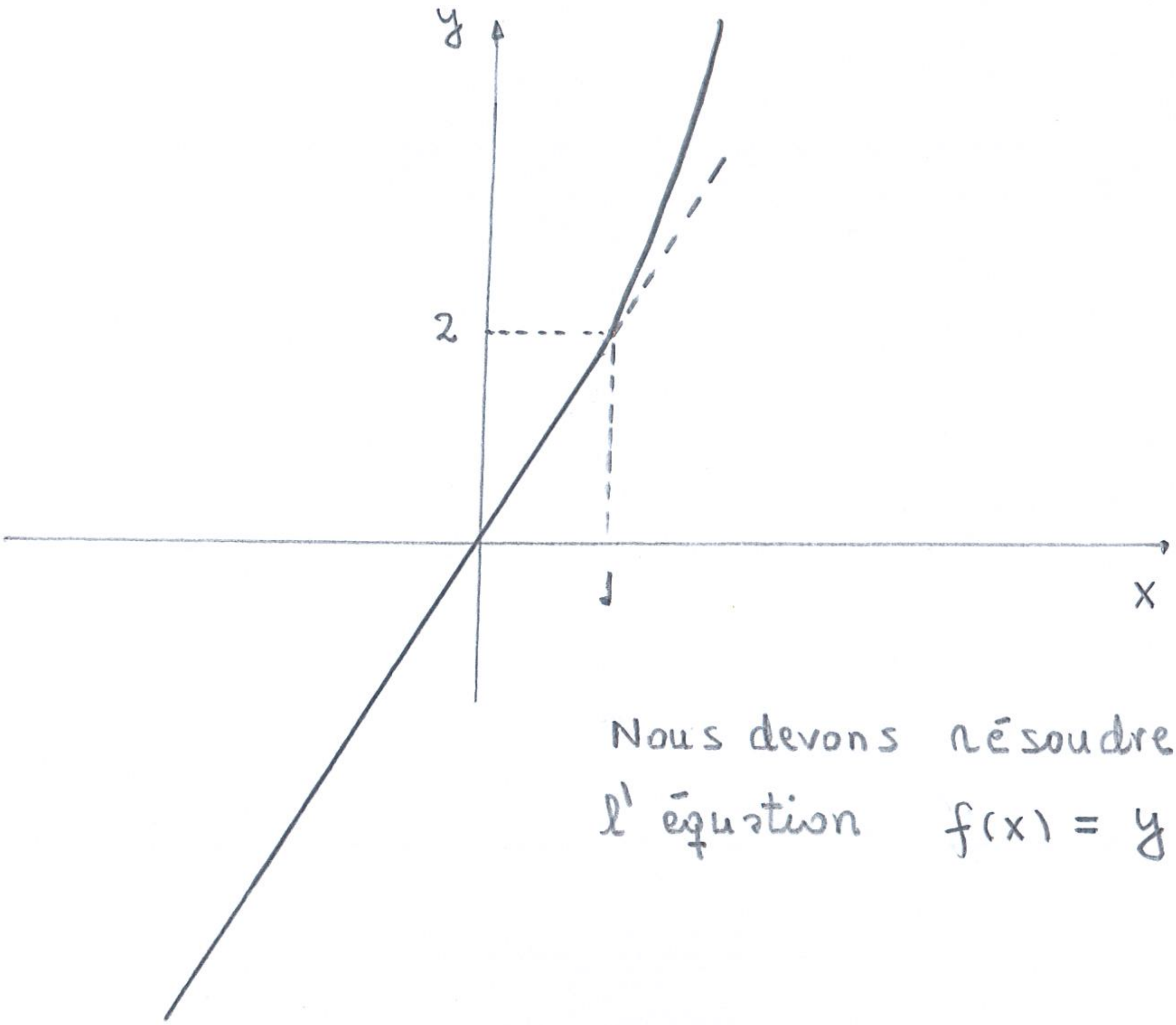
Donc $\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continue} \\ \text{et strictement croissant} \end{array}}$

Donc $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection

(b) Déterminons la fonction réciproque

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Nous devons résoudre l'équation $f(x) = y$

- Si $y = 2$, alors $x = 1$

- si $y > 2$, alors l'équation

$$x^2 + 1 = y$$

donne $x = \sqrt{y-1}$

- si $y < 2$, alors l'équation

$$2x = y$$

donne $x = \frac{y}{2}$

Bref,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{2} & \text{si } y < 2 \\ 1 & \text{si } y = 2 \\ \sqrt{y-1} & \text{si } y > 2 \end{cases}$$