Corrigé du CC3

Exercice 1. Pour calculer I, on fait une intégration par parties en posant $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = \cos x \\ v(x) = \sin x \end{cases}$. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x)\,dx \\ &= [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = 0 + [\cos x]_0^\pi = -2\,. \end{aligned}$$

Pour calculer J, on pose $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = \sin x \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$. On obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x)\,dx \\ &= [-x^2\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2x\cos x\,dx = \pi^2 + 2I = \pi^2 - 4\,. \end{aligned}$$

Exercice 2. En posant $\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ u'(t) = 1/t \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) = 1 \\ v(t) = t \end{cases}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^4 \ln(t)\,dt &= \int_1^4 u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_1^4 - \int_1^4 u'(t)v(t)\,dt \\ &= [t\ln(t)]_1^4 - \int_1^4 dt = 4\ln(4) - (4-1) = 4\ln(4) - 3\,. \end{aligned}$$

Exercice 3. a) L'équation différentielle homogène associée à (1) est $y' = 2ty$. La fonction $t \mapsto t^2$ étant une primitive de la fonction $t \mapsto 2t$, l'ensemble des solutions (sur $\mathbb{R}$) de cette équation différentielle homogène est

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{t^2}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

b) On utilise la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de (1) sous la forme $y_0(t) = k(t)e^{t^2}$. On a

$$y_0'(t) - 2ty_0(t) = k'(t)e^{t^2} + k(t)\cdot 2te^{t^2} - 2tk(t)e^{t^2} = k'(t)e^{t^2}$$

Donc y_0 est une solution de (1) si $\forall t \in \mathbb{R}\,,\ k'(t) = t^2$. La fonction $k : t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$ convient. On obtient ainsi la solution particulière $y_0 : t \mapsto \dfrac{t^3}{3}e^{t^2}$.

L'ensemble des solutions de (1) est

$$\mathcal{S} = \{y : t \mapsto \frac{t^3}{3}e^{t^2} + \lambda e^{t^2} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Exercice 4. 1) a) (2) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $S(X) = X^2 - X - 2$. Les racines de S sont -1 et 2. L'ensemble des solutions (sur $\mathbb{R}$) de (2) est donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\,.$$

b) Soit $y : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}$ (λ, μ étant des constantes réelles). On a $y'(t) = -\lambda e^{-t} + 2\mu e^{2t}$. D'où $y(0) = \lambda + \mu$, $y'(0) = -\lambda + 2\mu$. On veut donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 1 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ -1 + \mu + 2\mu = 1 \end{cases}$. Cela donne $\begin{cases} \mu = 2/3 \\ \lambda = 1/3 \end{cases}$.

On obtient ainsi la solution $y : t \mapsto \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$.

2) a) On a

$$y_0'(t) = ae^t + (at+b)e^t = (at+a+b)e^t \quad , \qquad y_0''(t) = ae^t + (at+a+b)e^t = (at+2a+b)e^t\,.$$

b) On obtient

$$y_0''(t) - y_0'(t) - 2y_0(t) = (at+2a+b)e^t - (at+a+b)e^t - 2(at+b)e^t = (-2at+a-2b)e^t$$

y_0 est une solution de (3) si $\begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} a = -1/2 \\ b = -3/4 \end{cases}$.

c) On vient de voir que la fonction $y_0 : t \mapsto (-\frac{1}{2}t - \frac{3}{4})e^t$ est une solution particulière de (3). D'après 1)a) l'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \{y : t \mapsto (-\frac{1}{2}t - \frac{3}{4})e^t + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\,.$$