TD4

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

$$a.\quad 4y'+3y=0 \qquad b.\quad (1+t^2)y'-2ty=0 \qquad c.\quad (1+t^2)y'-ty=0$$

Exercice 2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'=\left(2-\dfrac{1}{t}\right)y \\ y(2)=1 \end{cases}$.

Exercice 3. a) Trouver une solution particulière (de la forme $t\mapsto c_1\cos(3t)+c_2\sin(3t)$, avec c_1, c_2 constantes réelles) de l'équation différentielle $y'-y=\cos(3t)$.
b) Trouver une solution particulière (de la forme $t\mapsto ce^{4t}$ avec c constante réelle) de l'équation différentielle $y'-y=e^{4t}$.
c) En déduire une solution particulière de l'équation différentielle (E') $y'-y=\cos(3t)+e^{4t}$.
d) Résoudre (E').

Exercice 4. On considère l'équation différentielle $(E)\quad 7y'+2y=t^2-3t+5$.
a) Résoudre l'équation homogène associée.
b) Chercher une solution particulière de (E) qui soit une fonction polynomiale de degré 2, puis résoudre (E).
c) Déterminer l'unique solution de (E) prenant la valeur 3 en 7.

Exercice 5. La loi de refroidissement de Newton stipule que la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant. La température (en ^oC) du corps à l'instant t (en minutes) est notée $\theta(t)$. La température du milieu ambiant est noté T_0.
La loi de Newton se traduit mathématiquement ainsi : la fonction θ est solution de l'équation différentielle $y'=-\mu(y-T_0)$, où $\mu>0$ est une constante qui dépend du corps inerte (c'est le coefficient de proportionnalité, qui est fixé).
a) Résoudre cette équation différentielle.
b) Dans une pièce dont la température est de 20^oC, on met une tasse de thé de température 80^oC. On constate qu'au bout de 2 minutes, la température du thé a baissé à 60^oC. Déterminer la valeur du coefficient μ. Quelle est la température du thé au bout de 4 minutes?

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes :
a. $ty'-2y-t^3e^{-2t}=0$ (sur $]0,+\infty[$) b. $y'+(\tan t)y=\sin(2t)$ (sur $]-\pi/2,\pi/2[$) .

Exercice 7. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'-3y=\dfrac{2e^{3t}}{1+t^2} \\ y(1)=0 \end{cases}$$

Exercice 8. Résoudre l' équation différentielle $y''-y'-y=0$

Exercice 9. a) Résoudre l' équation différentielle $-2y'' + 6y' - \dfrac{9}{2}y = 0$.

b) Parmi les solutions trouvées en a), déterminer celle qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Exercice 10. a) Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$.

b) Donner l'allure de la courbe représentative de la solution trouvée en a).

Exercice 11. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$a.\quad y'' - 4y' + 4y = \cos t$; $\qquad b.\quad y'' + y' + \dfrac{y}{2} = te^{-2t}$.

Exercice 12. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} 3y'' - 2y' - y = 3t^2 + 1 \\ y(0) = -2\,,\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

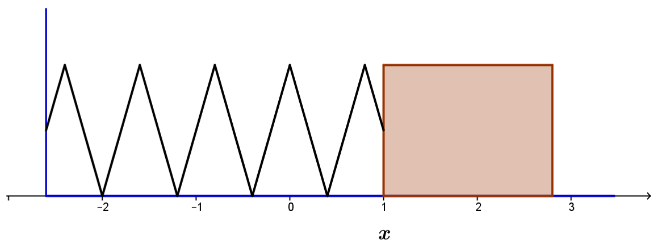
Exercice 13.

Un mobile est fixé à un ressort comme dans le dessin ci-contre. La position d'équilibre est $x = 0$. Le mobile est soumis à une force exercée par le ressort (qui est nulle si $x = 0$), et lorsqu'il se déplace, à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse. On s'intéresse à la fonction $t \mapsto x(t)$ qui à $t \in [0, +\infty[$ associe la position du mobile à l'instant t : t est exprimé en secondes et x en mètres. En notant $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ les dérivée et dérivée seconde de la fonction $t \mapsto x(t)$, on a :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \alpha\dot{x}(t)\,,$$

où k est une constante qui dépend du ressort et α un coefficient de frottement.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est à la position $x = 1$ et sa vitesse est nulle.



a) On suppose $\alpha = 0$. Déterminer $x(t)$; en déduire que le mouvement du mobile est périodique.

b) On suppose $\alpha > 0$. Déterminer $x(t)$. On distinguera différents cas selon le signe de $\alpha^2 - 4km$.

Exercice 14. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(1 + e^{2t})y' - e^{2t}y = 0$.

Exercice 15. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 5t \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 16. Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On admet que la fonction N, représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé dans une unité adéquate) vérifie les conditions suivantes.

i) N ne prend pas la valeur 0 et est solution de l'équation différentielle $(E)\quad y' = y\left(1-\dfrac{y}{K}\right)$, où K est une constante strictement positive.

ii) Pour $t=0$, N vaut N_0.

a) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{N(t)}$. Montrer que f est une solution sur $[0,+\infty[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E') qu'on écrira.

b) Résoudre (E').

c) Exprimer $f(t)$, puis $N(t)$ en fonction de t, K et N_0 pour $t\in[0,+\infty[$. La fonction N admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 17. On veut trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\ f'(x)=2f(-x)\,. \tag{1}$$

a) Montrer que si la fonction f est dérivable et vérifie (1), alors f est deux fois dérivable et est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre qu'on donnera.

b) Résoudre l' équation différentielle linéaire du second ordre obtenue en a) .

c) Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient (1).