Université d'Avignon – Faculté des Sciences Année 2018-2019

L1S2 Analyse 2

CONTROLE CONTINU 2

Durée : 1h. Tous documents, calculatrices (sauf type collège) et téléphones interdits. La note tiendra compte de la rédaction.

Exercice 1. Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de termes généraux :

1. $\sqrt{n^3+3n}-\sqrt{n^3+2n}$
2. $\dfrac{1}{3n^2}+(-1)^n$
3. $\dfrac{n\cos(n!)}{n^2+2}$
4. $3n^2-n^2\sin(2n)$

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}.$$

1) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$. Montrer que si $x\in[1\ ;\ 2]$ alors $f(x)\in[1\ ;\ 2]$.
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0=1$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1}=f(u_n)$.
2) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
Pour tout entier naturel $n,\ 1\leqslant u_n\leqslant 2$.
3) Etudier la suite (u_n).

Exercice 3. ! On reprend les notations de l'exercice précédent
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}.$$

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0=1$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1}=f(u_n)$.
$v_0=2$ et pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1}=f(v_n)$.
On pourra utiliser les résultats obtenus dans l'Exercice 2, sans les redémontrer.
En particulier, on *admettra*, dans cet exercice *seulement*, les résultats donnés, à savoir :
$f([1;2])\subset[1;2]$ et que $1\leqslant u_n\leqslant 2$.
On *admettra*, également, que l'on peut démontrer de la même façon qu'à l' **Exercice 2** question 2) :
Pour tout entier naturel $n,\ 1\leqslant v_n\leqslant 2$.
1) On *admet ici* que pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)\,(u_n+1)}$.
En déduire que pour tout entier naturel $n,\ v_n-u_n\geqslant 0$ et
$v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{4}\,(v_n-u_n)$.
2) Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_n-u_n\leqslant\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

QUESTIONS HORS BAREME

4) En déduire une méthode pour donner une valeur approchée de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ à 10^{-3} près.
5) Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)\,(u_n+1)}$.

Barème indicatif : Ex 1/6 Ex 2/7 Ex 3/7