1

CC 2 (2021-22) - Analyse 2

Exo. 1

1) Nous avons :

$$\frac{-1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad , \quad (\sin(n\pi/3))_n \text{ suite bornée} \Rightarrow \frac{-1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) = 3 \qquad \text{(nature : convergente).}$$

2) Nous avons : $u_n = n^3(-3+\cos(n^2))$. Or :

$$-1 \leq \cos x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \cos(n^2) \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow -1-3 \leq -3+\cos(n^2) \leq 1-3,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow -4 \leq -3+\cos(n^2) \leq -2,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $n^3 \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$-4n^3 \leq n^3(-3+\cos(n^2)) \leq -2n^3 \Rightarrow -4n^3 \leq u_n \leq -2n^2.$$

Vu que $\lim -4n^3 = \lim -2n^2 = -\infty$, d'après le Théorème des Gendarmes, on a $\lim u_n = -\infty$. (nature : divergente).

②

Exo. 2

1) f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{5}{3}\}$. On a

$$f'(x) = \frac{(7x-12)'(3x-5) - (7x-12)(3x-5)'}{(3x-5)^2}$$

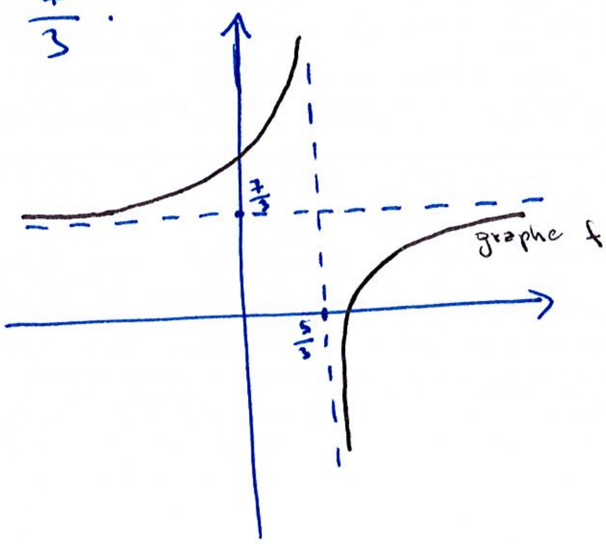
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{7(3x-5) - (7x-12)\cdot 3}{(3x-5)^2} = \frac{\cancel{21x} - 35 - (\cancel{21x} - 36)}{(3x-5)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(3x-5)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\tfrac{5}{3}\}.$$

$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{5}{3}\} \Rightarrow f$ croissante sur $]\frac{5}{3}, +\infty[$
et f croissante sur $]-\infty, \frac{5}{3}[$.

En plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{7}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		
f	$\frac{7}{3}$ $\nearrow$	$+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{7}{3}$
f'		$+$	‖	$+$	



On définit $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = 3$.

2) $(u_n)_n$ est une suite homographique.
(hors programme cette année)

3) Nous allons montrer par récurrence que

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation : $u_0 = 3$, $u_1 = f(u_0) = f(3) = \dfrac{7\cdot 3 - 12}{3\cdot 3 - 5} = \dfrac{21-12}{9-5} = \dfrac{9}{4}$

et on voit que $2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$.

③ <u>Hérédité</u> : on suppose que $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$. Puisque f est croissante sur l'intervalle $[2,3] \subset]\frac{5}{3}, +\infty[$, on a

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3 \Rightarrow f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3)$$

$$\Rightarrow \frac{7\cdot 2 - 12}{3\cdot 2 - 5} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{9}{4} \leq 3$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{2}{1} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3.$$

D'après le principe de récurrence, on trouve que

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ c.q.f.d.}$$

<u>Conséquence</u> : la suite $(u_n)_n$ est monotone et bornée, donc convergente.

4) On note $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. On a

$$\cancelto{\ell}{u_{n+1}} = f(u_n) = \frac{7\cancelto{\ell}{u_n} - 12}{3\cancelto{\ell}{u_n} - 5} \Rightarrow \ell = \frac{7\ell - 12}{3\ell - 5}$$

$$\Rightarrow \ell(3\ell - 5) = 7\ell - 12 \Rightarrow 3\ell^2 - 5\ell - 7\ell + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 3\ell^2 - 12\ell + 12 = 0 \overset{\div 3}{\Rightarrow} \ell^2 - 4\ell + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\ell - 2)^2 = 0 \Rightarrow \ell = 2.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 2.$$

④

Exo. 3

1) $\boxed{1-1}$ ▸ $n^2 = o(n^{3/2}) \iff \dfrac{n^2}{n^{3/2}} \longrightarrow 0$

$$\iff n^{2-\frac{3}{2}} \longrightarrow 0$$

$$\iff n^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad \underline{\text{faux}}.$$

Donc $n^2 = o(n^{3/2})$ est <u>faux</u>.

▸ $n^{\frac{2}{3}} = O(n^{\frac{3}{2}}) \iff \left(\dfrac{n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)_n$ bornée

$$\iff \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}}\right)_n \text{ bornée}$$

$$\iff \left(\frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}\right)_n \text{ bornée}$$

Puisque $\dfrac{1}{n^{5/6}} \to 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^{5/6}}\right)_n$ est bornée donc $n^{\frac{2}{3}} = O(n^{\frac{3}{2}})$ est <u>vrai</u>.

▸ $n + \sqrt{n}\sin(n) = O(n) \iff \left(\dfrac{n+\sqrt{n}\sin(n)}{n}\right)_n$ bornée

$$\iff \left(1 + \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right)_n \text{ bornée.}$$

Puisque $1 + \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \to 1$, la suite $\left(1 + \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right)_n$ est bornée. Ainsi, $n + \sqrt{n}\sin(n) = O(n)$ est <u>vrai</u>.

▸ $n^2 + 2n\sqrt{n^2+1} \sim n^2 \iff \dfrac{n^2 + 2n\sqrt{n^2+1}}{n^2} \longrightarrow 1$

$$\iff 1 + \frac{2\sqrt{n^2+1}}{n} \longrightarrow 1$$

$$\iff 1 + \frac{2\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}{n} \longrightarrow 1$$

$$\iff 1 + \frac{2\cancel{n}\sqrt{1+1/n^2}}{\cancel{n}} \longrightarrow 1$$

tp svp

5

$$\Longleftrightarrow \underbrace{1+2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}_{\to 1+2=3} \longrightarrow 1 \quad \underline{\text{faux}}.$$

Donc $n^2+2n\sqrt{n^2+1} \sim n^2$ est $\underline{\text{faux}}$.

$\boxed{1-2}$ On note que $n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0.$

Or

$$\frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow n\sin\frac{1}{n^2} \sim n\,\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n^2} = 0.$$

Donc $n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = o(1)$ est $\underline{\text{vrai}}$.

2) $\boxed{2-1}$ ▶ $4n^2+n \sim 4n^2 \Rightarrow \sqrt{4n^2+n} \sim \sqrt{4n^2} = \underline{2n}.$

plus simple possible

▶ $$\sqrt{4n^2+n} - 2n = \sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n}\right)} - 2n$$

$$= 2n\sqrt{1+\frac{1}{4n}} - 2n$$

$$= 2n\left(\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

$(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$

$$\sim \cancel{2n}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{4\cancel{n}} = \underline{\frac{1}{4}}.$$

plus simple possible

(Obs.: On a $\lim \sqrt{4n^2+n} - 2n = \frac{1}{4}$).

$\boxed{2-2}$ On sait que $u_n \to \ell \Leftrightarrow u_n \sim \ell$. Or

$$\sqrt{4n^2+n} - 2n \longrightarrow \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \sqrt{4n^2+n} - 2n - \frac{1}{4} \longrightarrow 0$$

Ainsi, $\sqrt{4n^2+n} - 2n - \frac{1}{4} \sim 0.$

6

Exo. 4

▸ $z_n = e^{i\pi/3} - \frac{1}{n^2} e^{i\frac{n}{3}}$.

On voit que

$$\frac{-1}{n^2} \to 0, \ (e^{i\frac{n}{3}})_n \text{ bornée} \Rightarrow \frac{-1}{n^2} e^{i\frac{n}{3}} \to 0.$$

Ainsi, $\lim z_n = e^{i\pi/3}$, donc $(z_n)_n$ est une suite convergent. Puisque toute suite convergente est bornée, on trouve que $(z_n)_n$ est bornée.

▸ $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n - 3i$.

On voit que $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = -3i$. Puisque

$$u_n = u_0 + n \cdot r = 1 + n(-3i) = 1 - 3ni,$$

on voit que $(u_n)_n$ n'est pas bornée (partie imaginaire $-3n$ non-bornée). Elle ne peut donc pas être convergente.