Université d'Avignon - Faculté des Sciences Année 2022-2023

L1S2 - Analyse 2

TD 4

Exercice 1. Vérifier les assertions suivantes :

$$\frac{1}{n} = o(1) \quad \frac{(\ln n)^{10}}{n^3} = o(\frac{1}{n^2}), \quad \frac{2n+3}{n^2-5} = \mathcal{O}(\frac{1}{n}), \quad \frac{\cos(n\pi/3)}{n} = \mathcal{O}(1)\,.$$

Exercice 2. Vérifier les assertions suivantes :

$$\frac{2n+3}{n^3-5} = o(\frac{1}{n}), \quad \frac{\cos(n\pi/3)}{n} = o(1), \frac{1}{n} = \mathcal{O}(1), \quad \frac{2n+3}{n-5} = \mathcal{O}(1), \,.$$

Exercice 3. Déterminer un équivalent simple pour chacune des suites ci-après

1) $\dfrac{n^6+4n^2-6}{7n^4-3n^2+n}$; 2) $\sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$; 3) $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln n-2n^2}$;

Exercice 4. Déterminer un équivalent simple pour chacune des suites ci-après

1) $(n+1)^{1/3}-n^{1/3}$; 2) $\left(1+\ln(1+\sin\dfrac{1}{n})\right)^{2/3}-1.$

Exercice 5. A l'aide des équivalents, déterminer la limite de la suite de terme général :

1) $(n^2+n)\sqrt{\sin\dfrac{\pi}{2n^4}}$; 2) $n^2\tan\left(\sqrt{\cos\dfrac{1}{n}}-1\right)$;

Exercice 6. A l'aide des équivalents, déterminer la limite de la suite de terme général :

3) $\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; 4) $\dfrac{\sin(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4})}{\sqrt{\exp(\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2})-1}}.$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 7. Les suites dont les termes généraux figurent ci-dessous tendent toutes vers $+\infty$. Classer les par ordre croissant pour la négligeabilité.

$n\ln n \quad ; \quad \dfrac{n^2}{\ln n} \quad ; \quad \dfrac{3^n}{n^3} \quad ; \quad n^{3/2} \quad ; \quad 2^n \ln n.$

Exercice 8. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + ... + \frac{1}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Exercice 9. Déterminer un équivalent simple pour chacune des suites ci-après, puis leur limite si elle existe.

1) $\sqrt{n^3+2}$ 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ 3) $\binom{n}{k}$ (k étant fixé) 4) $(n+1)^p - (n-1)^p$ (p entier positif fixé) 5) $(n+1)^p - n^{p-1}(p+n)$ (p entier positif fixé) 6) $\sqrt{2n^2+n} - n$ 7) $\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2}n$ 8) $\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{n}$ 9) $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}$ 10) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}$ 11) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 12) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n^2}$ 13) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n^2}$ 14) $\ln^4 n - \dfrac{n}{\ln^2 n}$ 15) $3^{\ln n} - n^2$ 16) $2^{n+1} - 2^n$ 17) $2^{n^2+n} - 2^{n^2}$ 18) $\left(\sqrt{n}\right)^n + n^{\sqrt{n}} + n^{\frac{n}{2}}$ 19) $(2^n)^n + 2^{n^2} + (4^n)^2$ 20) $(2n)! - n^n$ 21) $(n+1)^n$ 22) $(n-1)^n$ 23) $(n+1)^n - n^n$ 24) $(n+1)^n - en^n$

Exercice 10. Vrai ou faux ?

(1) Soient (u_n), (u'_n), (v_n) des suites réelles vérifiant : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0, v_n > 0 \\ u_n \sim u'_n \end{cases}$; alors $u_n + v_n \sim u'_n + v_n$.

(2) Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to a$, alors $u_n \sim u_0 a^n$.

(3) Si $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \sim v_n$ alors $u_n \sim u_{n-3}v_{n-2}v_{n-1}v_n$.

(4) Si $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \sim v_n$ alors $u_n \sim u_0 v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n$

(5) Si $\lim n u_n = 1$ alors $\lim n u_{n+1} = 1$.

(6) Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0, v_n > 0 \\ u_n = o(v_n) \end{cases}$ et f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $f(u_n) = o(f(v_n))$.

Exercice 11. Montrer que si $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 0$ alors $(\sin u_n - \sin v_n) \sim (u_n - v_n)$ et $(e^{u_n} - e^{v_n}) \sim (u_n - v_n)$.