0. EQUATIONS DU SECOND DEGRE, DEVELOPPEMENT LIMITES, FONCTIONS USUELLES, DÉRIVÉS, PRIMITIVES

1 Equations du second degré

Dans $\mathbb{R}$, soit l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si $\Delta := b^2 - 4ac$ est tel que :
1. $\Delta < 0 \Rightarrow$ pas de solutions
2. $\Delta = 0 \Rightarrow$ solution = racine double $x = -\frac{b}{2a}$
3. $\Delta > 0 \Rightarrow$ il y a deux solutions distinctes $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Dans $\mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0$$

il y a toujours 2 solutions :

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

où δ est une racine carré dans $\mathbb{C}$ de Δ : $\delta^2 = \Delta$ (δ existe toujours).

2 Dérivée des fonctions usuelles

$f(x)$	intervalle de définition	$f'(x)$
c (constante)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \geq 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, $k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

3 Opérations et dérivées

Notation f'	Notation $\frac{df}{dx}$
$(f+g)' = f' + g'$	$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
$(cf)' = cf'$, avec c constante	$\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}$
$(fg)' = f'g + fg'$	$\frac{d(fg)}{dx} = f\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g$
$(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$	$\frac{d(\frac{1}{f})}{dx} = -\frac{1}{f^2}\frac{df}{dx}$
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$	$\frac{d(\frac{f}{g})}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$
$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$	$\frac{d(f\circ g)}{dx} = (\frac{df}{dx} \circ g).\frac{dg}{dx}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
$(\frac{1}{u^n})' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$	$\frac{d(\frac{1}{u^n})}{dx} = -\frac{n}{u^{n+1}}\frac{du}{dx}$
$(e^u)' = u'e^u$	$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u\frac{du}{dx}$
$(\ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$, avec c constante	$\frac{d(\ln\|u\|)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

Pour démontrer ces formules, il faut revenir à la définition de la dérivabilité.

Definition. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe. Dans le cas où cette limite existe, on la note $f'(x_0)$.

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0. Concrètement, $f'(x_0)$ représente la pente de la tangente à la courbe dont le graphe est donné par f. Si f est dérivable en x_0, la tangente en x_0 a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On remarque que le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ pour $x \neq x_0$ représente la pente d'une corde (le segment qui rejoint les deux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$).

4 Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	intervalle de définition	$F(x)$
c (constante)	$\mathbb{R}$	$cx + C$
x	$\mathbb{R}$	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{1}{x^n}$, $n \geq 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \ln x - x + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, $k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

5 Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- une primitive de $u'.u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$;
- une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$;
- une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ avec $n \geq 2$;
- une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ en supposant $u > 0$ sur I ;
- une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln |u|$.

Si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est

$$\int u'u^a = \begin{cases} \frac{u^{a+1}}{a+1} + C & \text{si} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ \ln u + C & \text{si} \quad a = -1 \end{cases}$$

6 Développements limités

Ci-dessous, il y a les définitions de o et O (à savoir). Vous pouvez sauter une partie de cette sous-section et passer directement au côté opérationnel des développements limités.

6.1 Rappels sur la notation o, O et $\sim$

DEFINITION. Soit $V \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. On dit que V est un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$.

DEFINITION. (i) On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 et on note $f = O(g)$ si et seulement si il existe un réel $K \geq 0$ et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)| \leq K|g(x)|$.

(ii) On dit que g est prépondérante devant f (ou que f est négligeable devant g) au voisinage de x_0 et on note $f = o(g)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$.

REMARQUE. (i) Si $f = o(g)$ alors $f = O(g)$. Si $f = O(1)$, resp. $f = o(1)$, alors f est bornée au voisinage de x_0, resp. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

(ii) On vérifie sans difficulté que $f = o(g)$ au voisinage de x_0 équivaut à l'existence d'une fonction θ à valeur réelle, définie sur un voisinage de x_0 telle que $f(x) = g(x)\theta(x)$ avec $\theta(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$.

Proposition 1 *Soit $f_1, f_2, \varphi, \psi, g, h : I \to \mathbb{R}$ six fonctions, $x_0 \in I$ et α, β deux réels.*
(i) Si $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g)$ alors $\alpha f_1 + \beta f_2 = O(g)$.

(ii) Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $\alpha f_1 + \beta f_2 = o(g)$.

(iii) On a les trois implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \varphi = O(\psi) & \text{et} \quad f = O(g) & \Rightarrow \varphi f = O(\psi g) \\ \varphi = o(\psi) & \text{et} \quad f = O(g) & \Rightarrow \varphi f = o(\psi g) \\ \varphi = O(\psi) & \text{et} \quad f = o(g) & \Rightarrow \varphi f = o(\psi g). \end{array}$$

(iv) On a les trois implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} f = O(g) & \text{et} \quad g = O(h) & \Rightarrow f = O(h) \\ f = O(g) & \text{et} \quad g = o(h) & \Rightarrow f = o(h) \\ f = o(g) & \text{et} \quad g = O(h) & \Rightarrow f = o(h). \end{array}$$

Lemme 2 *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. Alors, $f - g = o(g) \Rightarrow g = O(f)$.*

Preuve. Il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ on ait $|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}|g(x)|$. D'où pour $x \in V$:

$$|g(x)| = |g(x) - f(x) + f(x)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \frac{1}{2}|g(x)| + |f(x)|.$$

Ainsi $|g(x)| \leq 2|f(x)|$ pour $x \in V$, d'où le résultat. $\square$

Definition. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. On dit que f et g sont équivalentes en x_0 et on note $f \sim g$ si et seulement si $f - g = o(g)$.

Remarque. On vérifie que $f \sim g$ équivaut à l'existence d'une fonction θ à valeurs réelles définie sur un voisinage de x_0 telle que $f(x) = g(x)(1 + \theta(x))$ avec $\theta(x) \to 0$ lorsque x tend vers x_0.

Proposition 3 *Soit $f, g, \varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ quatre fonctions et $x_0 \in I$.*
(i) Si $f \sim g$ alors $f = O(g)$ et $g = O(f)$.
(ii) Si $\varphi \sim \psi$ et $f \sim g$ alors $\varphi f \sim \psi g$.

6.2 Développements limités

Definition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n si il existe $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ $n+1$ réels tels que au voisinage de x_0 on ait :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Par commodité on notera parfois $o((x - x_0)^n)$ sous la forme $o(x - x_0)^n$, i.e.

$$o((x - x_0)^n) = o(x - x_0)^n = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction à valeur réelle définie au voisinage de $x = x_0$ et telle que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$.
Remarque. Dans la définition ci-dessus, l'égalité se réécrit donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

où ε est une fonction à valeur réelle définie au voisinage de $x = x_0$ et telle que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$. Il est très souvent commode d'écrire un développement limité sous la forme ci-dessus et en introduisant la fonction ε. Cette écriture sert notamment pour les fonctions de plusieurs variables.

Proposition 4 *Si f admet un développement limité à l'ordre n, alors celui-ci est unique.*

Preuve. Supposons que f ait deux développements distincts :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Soit $p = \min\{k\ ;\ \alpha_k \neq \beta_k\}$. Alors, il vient $(\alpha_p - \beta_p)(x - x_0)^p = o(x - x_0)^p$ ce qui est absurde. $\square$

Proposition 5 *Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors f est continue en x_0. Si $n \geq 1$, alors f est dérivable en x_0.*

6.3 Les DL en pratique / méthodes

Il faut indiquer à a quel ordre on fait le DL et en quel point.

Attention, on ne peut pas dériver un développement limité ! Par contre, on peut intégrer un DL pour trouver le DL d'une primitive. Pour les développements limités de quotient de fonctions (simplification d'ordres) ou le développement limité de la fonction inverse, il faut s'entrainer en exercice. De même pour le développement limité de la composée de deux fonctions.

Les développements limités suivants au voisinage de **zéro** sont à savoir par coeur. Ils s'obtiennent par la formule de Taylor-Young appliquée aux fonctions usuelles.

$$
\begin{array}{rcl}
e^t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + o(t^n) \\
\cos t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}) \\
\sin t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(t^{2n+2}) \\
\tan t & = & t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + o(t^8) \\
\cosh t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}) \\
\sinh t & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(t^{2n+2}) \\
\tanh t & = & t - \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + o(t^8) \\
(1+t)^\alpha & = & 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} t^k + o(t^n) \\
\frac{1}{1-t} & = & \sum_{k=0}^{n} t^k + o(t^n) \\
\frac{1}{1+t} & = & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + o(t^n) \\
\ln(1+t) & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} + o(t^n)
\end{array}
$$

Exemples :

$$
\begin{array}{lcll}
e^t & = & 1 + t + t^2/2 + o(t^2) & DL_2(0) \\
\cos t & = & 1 - t^2/2 + o(t^3) & DL_3(0) \\
\sin t & = & t + o(t^2) & DL_2(0) \\
\ln(1+t) & = & t - t^2/2 + o(t^2) & DL_2(0) \\
(1+t)^\alpha & = & 1 + \alpha t + o(t) & DL_1(0) \\
\frac{1}{1+t} & = & 1 - t + o(t) & DL_1(0)
\end{array}
$$