Université d'Avignon — 2020-2021
Math II — Licence 1 Physique-Chimie

CC2 : 15 avril 2021 : 8h30 - 9h30 (1h ; 1h20 pour les tiers temps)

La solution de l'équation homogène $y' + 2y = 0$ est de la forme (trouver la bonne réponse) :

Veuillez choisir une réponse :

- a. $y(t) = -2t$
- b. $y(t) = 2t$
- c. $y(t) = Ce^{-2t}$, où $C \in \mathbb{R}$
- d. $y(t) = 0$
- e. $y(t) = Ce^{2t}$, où $C \in \mathbb{R}$

Reponse : immédiat : $y(t) = Ce^{-2t}$ (formule du cours pour EDO d'ordre 1 linéaire homogène).

Soit $a > 0$. La solution du problème de Cauchy : $y' - ay = 0$, $y(1) = 0$ est (trouver la bonne réponse)

Veuillez choisir une réponse :

- a. $y(t) = 0$
- b. $y(t) = e^{at} - e^{a}$
- c. $y(t) = e^{-at} - e^{-a}$
- d. $y(t) = e^{a(t-1)}$
- e. $y(t) = a$
- f. $y(t) = -e^{at} + e^{a}$

Reponse : par la formule du cours pour EDO d'ordre 1 linéaire homogène, $y_H(t) = Ce^{at}$ où $C \in \mathbb{R}$. Donc $y_H(1) = Ce^{a} = 0 \Rightarrow C = 0$. Ainsi, la solution est $y(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Simplifiez le nombre complexe $z = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^{2031}$ (une seule bonne réponse) :

Veuillez choisir une réponse :

- a. $z = \frac{1}{\sqrt{2}^{2031}} e^{\frac{i\pi}{4}}$
- b. $z = \frac{1}{2^{2031}} e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
- c. $z = \frac{1}{\sqrt{2}^{2031}} e^{-\frac{i\pi}{4}}$
- d. $z = \frac{1}{\sqrt{2}^{2031}} e^{\frac{3i\pi}{4}}$
- e. $z = \frac{1}{2^{2031}} e^{\frac{i\pi}{4}}$

Reponse : La réponse est d car en utilisant $2031 = 254 \times 8 - 1$:

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2031} e^{\frac{2031 i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}^{2031}} e^{\frac{2031 i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}^{2031}} e^{\frac{254\times 8 i\pi}{4}} e^{\frac{-i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}^{2031}} e^{\frac{-i\pi}{4}}.$$

Soit r un nombre strictement négatif. La solution générale de l'équation $y'' + ry = 0$ s'écrit (une seule réponse) :

Veuillez choisir une réponse :

- a. $y(t) = Ae^{rt} + Be^{-rt}$, où $A, B \in \mathbb{R}$.
- b. $y(t) = Ae^{\sqrt{-r}t} + Be^{-\sqrt{-r}t}$, où $A, B \in \mathbb{R}$.
- c. $y(t) = Ae^{\sqrt{r}t} + Be^{-\sqrt{r}t}$, où $A, B \in \mathbb{R}$
- d. $y(t) = Ae^{\sqrt{-r}t} + B\cos(rt)$
- e. $y(t) = A\cos(\sqrt{-r}t) + B\sin(\sqrt{-r}t)$, où $A, B \in \mathbb{R}$.

Reponse : L'équation caractéristique est $x^2 + r = 0$ c.a.d. $x^2 - \sqrt{-r}^2$ (comme $r < 0$). D'où $x = \pm\sqrt{-r}$ et $y(t) = Ae^{\sqrt{-r}t} + Be^{-\sqrt{-r}t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Soit l'équation différentielle $y' + ay = e^{2t}$ où $a \in \mathbb{R}$. Trouver la bonne réponse:

Veuillez choisir une réponse :

- a. Pour $a = 0$, la solution générale s'écrit $y(t) = 2e^{2t} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
- b. Pour $a > 0$, la solution générale de l'équation s'écrit $y(t) = \frac{e^{2t}}{2+a} + Ce^{at}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- c. Pour $a \neq 0$, une solution particulière de l'équation s'écrit $y(t) = \frac{e^{2t}}{2+a}$.
- d. Une solution particulière de l'équation pour $a = -2$ s'écrit $y(t) = e^{-2t}$.
- e. Une solution particulière de l'équation pour $a = -2$ s'écrit $y(t) = te^{2t}$.

Reponse : Pour $a = -2$, l'équation s'écrit $y' - 2y = e^{2t}$. La solution de l'équation homogène est $t \mapsto e^{2t}$ donc, une solution de l'équation homogène doit être cherchée sous la forme $t \mapsto \alpha te^{2t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (il faut augmenter de 1 le degré). Par identification, on trouve $\alpha = 1$. D'où $y(t) = te^{2t}$ est une solution particulière de l'équation.

Soit $z = \frac{1-i\omega^2}{1+i\omega^2}$ où $\omega \in \mathbb{R}$. Trouver la bonne réponse (ci-après les symboles $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{I}$ désignent la partie réelle et la partie imaginaire) :

Veuillez choisir une réponse :

- a. $\mathfrak{R}(z) = \frac{1+\omega^4}{1-\omega^4}$, $\mathfrak{I}(z) = \frac{-2\omega^2}{1-\omega^4}$
- b. $\mathfrak{R}(z) = -\frac{1-\omega^4}{1+\omega^4}$, $\mathfrak{I}(z) = \frac{2\omega^2}{1+\omega^4}$
- c. $\mathfrak{R}(z) = -\frac{\omega^4-1}{1+\omega^4}$, $\mathfrak{I}(z) = \frac{-2\omega^2}{1-\omega^4}$
- d. $\mathfrak{R}(z) = \frac{1-\omega^4}{1+\omega^4}$, $\mathfrak{I}(z) = \frac{-2\omega^2}{1+\omega^4}$
- e. $\mathfrak{R}(z) = \frac{-1+\omega^4}{1-\omega^4}$, $\mathfrak{I}(z) = \frac{2\omega^2}{1+\omega^4}$

Reponse : par la quantité conjuguée, $z = \frac{(1-i\omega^2)^2}{1+\omega^4} = \frac{1-\omega^4}{1+\omega^4} - \frac{2i\omega^2}{1+\omega^4}$ d'où réponse d.

On considère le problème de Cauchy : $y'' + 3y = 3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. La solution de ce problème est (trouver la bonne réponse):

Veuillez choisir une réponse :

- a. $y(t) = 1 - \sin(\sqrt{3}t)$
- b. $y(t) = 1 + \cos(\sqrt{3}t)$
- c. $y(t) = e^{-3t} + 3$
- d. $y(t) = e^{-\sqrt{3}t} + 1$
- e. $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\cos(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t)$

Reponse : La seule solution qui vérifie les conditions est $y(t) = 1 + \cos(\sqrt{3}t)$ (qui en effet vérifie $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ et $y'' + 3y = 3$).

On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = e^{-t}$. Une solution particulière de cette équation est (une bonne réponse) :

Veuillez choisir une réponse :

- a. $y(t) = (at + b)e^{t}$ où $a, b \in \mathbb{R}$
- b. $y(t) = ce^{-t}$ où $c \in \mathbb{R}$
- c. $y(t) = (bt + c)e^{-t}$ où $b, c \in \mathbb{R}$
- d. $y(t) = (at^2 + bt)e^{-t}$ où $a, b \in \mathbb{R}$
- e. $y(t) = (at^2 + bt + c)e^{t}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$

Reponse : l'équation caractéristique est $(x+1)^2 = 0$ qui donne $x = -1$ racine double. Le second membre est $t \mapsto e^{-t}$ avec -1 racine double de l'équation caractéristique. Il faut donc augmenter de 2 le degré et la bonne réponse est donc d). Noter qu'il n'est pas utile d'avoir un terme ce^{-t} en plus (car ce^{-t} est déjà solution de l'équation homogène). Notez également que la solution de l'équation homogène est de la forme $t \mapsto (at + b)e^{-t}$.

Soit l'équation $x^2 + 4x + 4a = 0$ où $a \in \mathbb{R}$. Trouver la bonne réponse

Veuillez choisir une réponse :

- a. Pour $a = 0$, l'équation admet une racine double.
- b. Pour $a = 1$, l'équation admet deux racines distinctes.
- c. Pour tout a, l'équation admet deux racines complexes conjuguées.
- d. Pour a<1, alors $-2 - 2i\sqrt{1-a}$ est solution de l'équation.
- e. Pour a>1, alors $-2 - 2i\sqrt{a-1}$ est solution de l'équation.

Reponse : **Reponse** : Le discriminant est $\Delta = 4(1 - a)$. Pour $a > 1$, $\Delta < 0$. Donc pour $a > 1$, les solutions de l'équation sont $x = 2 \pm 2i\sqrt{a-1}$. Donc la bonne réponse est e.

On considère l'équation différentielle $y'' + ay = \cos(t)$ où $a \in \mathbb{R}$. Donner la bonne réponse (on rappelle que $\mathfrak{R}$ désigne la partie réelle):

Veuillez choisir une réponse :

- a. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation admet une solution particulière de la forme $y(t) = A\cos t + B\sin t$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
- b. Pour $a = 1$, une solution particulière de l'équation est de la forme $y(t) = \mathfrak{R}(\alpha t e^{it})$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.
- c. Pour $a = 4$, la solution de l'équation homogène associée est $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
- d. Pour $a = 0$, la solution de l'équation est une primitive de la fonction $\cos(t)$.
- e. Pour $a \neq 1$, une solution particulière de l'équation est de la forme $y(t) = A\cos(\sqrt{a}t) + B\sin(\sqrt{a}t)$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

Reponse : pour $a = 1$, comme $\cos t$ et $\sin t$ sont solutions de l'équation homogène il faut augmenter le degré de 1 pour trouver une solution particulière, d'où la bonne réponse est b.

Soit $z = \frac{4i}{i-4}$. Le nombre complexe z s'écrit (une seule bonne réponse):

Veuillez choisir une réponse :

- a. $z = -\frac{4}{17} - \frac{16i}{17}$
- b. $z = \frac{4}{17} - \frac{16i}{17}$
- c. $z = \frac{4i}{17} - \frac{16}{17}$
- d. $z = \frac{4}{17} + \frac{16i}{17}$
- e. $z = 1$

Reponse : quantité conjuguée : $z = 4/17 - 16i/17$ d'où la bonne réponse est b.

Soit $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$. On a (choisir une réponse):

Veuillez choisir une réponse :

- a. $z = 0$
- b. $z = i^2$
- c. $z = i$
- d. $z = 1$
- e. $z = -i$

Reponse : idem : quantité conjuguée. La réponse est donc b car on a

$$z = \left(\frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^2 = \frac{(-2i)^2}{4} = -1 = i^2$$