Problème :
Trouver une solution particulière d'une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = \big(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}, \qquad \text{(E)}$$

avec α, β réels et P_1, P_2 deux polynômes à coefficients réels.

Solution : On doit chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p(t) = \big(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}, \qquad (1)$$

où les degrés des polynômes Q_1, Q_2 vont dépendre si $\alpha + \beta i$ est une racine (complexe) du polynôme caractéristique ou non. On a donc deux cas à discuter.

Le polynôme caractéristique de E est $P(X) = aX^2 + bX + c$.

1er cas : $\boxed{P(\alpha + \beta i) \neq 0}$

Alors on cherche une solution particulière comme dans (1) avec Q_1 et Q_2 de degré le plus haut nombre entre $\deg P_1$ et $\deg P_2$. Par exemple, si l'équation (E) est

$$2y'' + y' - y = \big(3\cos(3t) + (t+1)\sin(3t)\big)e^t,$$

on note que 1+3i n'est pas racine du polynôme caractéristique et, donc, on cherche une solution particulière comme dans (1) avec Q_1, Q_2 deux polynômes de degré 1 (car $\deg P_1 = 0$ et $\deg P_2 = 1$, donc 1 est le plus grand degré). Ainsi, on cherche une solution sous la forme

$$y_p(t) = \big((\alpha t + \beta)\cos(3t) + (\gamma t + \delta)\sin(3t)\big)e^t.$$

2ème cas : $\boxed{P(\alpha + \beta i) = 0}$

Alors on cherche une solution particulière comme dans (1) avec Q_1 et Q_2 de degré le plus haut nombre entre $\deg P_1$ et $\deg P_2$ augmenté de 1. Par exemple, si l'équation (E) est

$$y'' - 2y + 5y = \cos(2t)e^t,$$

on note que 1+2i est une racine du polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 5$, donc, on cherche une solution particulière comme dans (1) avec Q_1, Q_2 deux polynômes de degré 1 (car $\deg P_1 = 0$ et P_2 est nul, donc on considère Q_1, Q_2 de degré $0 + 1$, soit degré 1). Ainsi, on cherche une solution sous la forme

$$y_p(t) = \big((\alpha t + \beta)\cos(2t) + (\gamma t + \delta)\sin(2t)\big)e^t.$$

Attention : même si le second membre est $\cos(2t)e^t$, et donc on n'a pas de sinus, on doit quand même chercher une solution qui est combinaison incluant $\sin(2t)$!

Exercice 15.1 du TD 3. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = 2\cos(t) - 4t\sin(t). \tag{E}$$

Solution : Le polynôme caractéristique de (E) est $P(X) = X^2 + 1$. Pour cela on a bien $\Delta = -4 < 0$ et, donc, pour la partie homogène de la solution on doit calculer

$$u = \frac{-0}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad v = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1.$$

Ainsi, la partie homogène de la solution de (E) est

$$\big(K_1\cos(2t) + K_2\sin(2t)\big)e^{0\cdot t} = K_1\cos(2t) + K_2\sin(2t), \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Maintenant, on doit trouver une solution particulière. Même si dans le second membre de l'eq. (E) on ne voit pas d'exponentielle, on doit la regarder comme

$$y'' + y = (2\cos(t) - 4t\sin(t))e^{0\cdot t}$$

et analyser si $0 + 1 \cdot i = i$ est une racine du polynôme caractéristique $P(X) = X^2 + 1$ ou pas. Il arrive que $P(i) = 0$, donc on va devoir augmenter le degré de Q_1, Q_2 par rapport aux degrés de P_1, P_2. Ici le second membre est $2\cos(t) - 4t\sin(t)$ et donc le plus haut degré est 1. On doit donc poser la solution particulière avec Q_1 et Q_2 d'ordre 2. Ainsi, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(t) = \big(Q_1(t)\cos(t) - Q_2(t)\sin(t)\big)e^{0\cdot t} = Q_1(t)\cos(t) - Q_2(t)\sin(t), \tag{3}$$

où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré 2, disons

$$Q_1(t) = at^2 + bt + c \qquad \text{et} \qquad Q_2(t) = a't^2 + b't + c'.$$

Un petit raccourci : quand on doit augmenter le degré comme ici, on n'est pas obligé de chercher Q_1, Q_2 avec un terme constant. On peut, plus simplement, chercher une solution sous la forme (3) mais avec

$$Q_1(t) = at^2 + bt \qquad \text{et} \qquad Q_2(t) = a't^2 + b't.$$

Appliquer ce raccourci n'est pas obligatoire mais permet de simplifier un peu les calculs.

Cherchons donc une solution particulière y_p pour (E) sous la forme

$$y_p(t) = Q_1(t)\cos(t) + Q_2\sin(t),$$

avec $Q_1(t) = at^2 + bt$ et $Q_2(t) = a't^2 + b't$. On calcule

$$y_p'(t) = Q_1'(t)\cos(t) - Q_1(t)\sin(t) + Q_2'(t)\sin(t) + Q_2(t)\cos(t)$$

et

$$\begin{aligned} y_p''(t) &= Q_1''(t)\cos(t) - Q_1'(t)\sin(t) - Q_1'(t)\sin(t) - Q_1(t)\cos(t) + Q_2''(t)\sin(t) + Q_2'(t)\cos(t) + Q_2'(t)\cos(t) - Q_2(t)\sin(t) \\ &= Q_1''(t)\cos(t) - 2Q_1'(t)\sin(t) - Q_1(t)\cos(t) + Q_2''(t)\sin(t) + 2Q_2'(t)\cos(t) - Q_2(t)\sin(t). \end{aligned}$$

Quand on fait $y_p'' + y_p$ on as les termes $Q_1(t)\cos(t)$ et $Q_2\sin(t)$ qui s'annulent. On trouve donc

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= Q_1''(t)\cos(t) - 2Q_1'(t)\sin(t) + Q_2''(t)\sin(t) + 2Q_2'(t)\cos(t) \\ &= \big(Q_1''(t) + 2Q_2'(t)\big)\cos(t) + \big(Q_2''(t) - 2Q_1'(t)\big)\sin(t). \end{aligned}$$

Pour que l'égalité $y_p'' + y_p = 2\cos(t) - 4t\sin(t)$, on doit donc avoir

$$\big(Q_1''(t) + 2Q_2'(t)\big)\cos(t) + \big(Q_2''(t) - 2Q_1'(t)\big)\sin(t) = 2\cos(t) - 4t\sin(t).$$

Coefficient par coefficient, cela correspond à

$$Q_1''(t) + 2Q_2'(t) = 2 \qquad \text{et} \qquad Q_2''(t) - 2Q_1'(t) = -4t.$$

On calcule les dérives de Q_1 et Q_2 :

$$Q_1(t) = at^2 + bt \implies \begin{aligned} Q_1'(t) &= 2at + b \\ Q_1''(t) &= 2a \end{aligned}$$

et

$$Q_2(t) = a't^2 + b't \implies \begin{aligned} Q_2'(t) &= 2a't + b' \\ Q_2''(t) &= 2a' \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Q_1''(t) + 2Q_2'(t) = 2 &\implies 2a + 2(2a't + b') = 2 \\ &\implies 4a't + 2a + 2b' = 2 \\ &\implies 4a' = 0 \quad \text{et} \quad 2a + 2b' = 2 \\ &\implies a' = 0 \quad \text{et} \quad b' = 1 - a \end{aligned}$$

et, en plus,

$$\begin{aligned} Q_2''(t) - 2Q_1'(t) = -4t &\implies 2a' - 2(2at + b) = -4t \\ &\implies -4at + 2a' - 2b = -4t \\ &\implies -4a = -4 \quad \text{et} \quad 2a' - 2b = 0 \\ &\implies a = 1 \quad \text{et} \quad b = a' \end{aligned}$$

Les égalités $a' = 0$, $a = 1$, $b' = 1 - a$ et $b = a'$ impliquent $b' = 0$ et $b = 0$. Ainsi, $Q_1(t) = t^2$ et $Q_2(t) = 0$. La solution particulière de (E) recherché est donc

$$y_p(t) = t^2 \cos(t).$$

Par conséquent, les solutions de (E) sont

$$\boxed{y(t) = K_1 \cos(2t) + K_2 \sin(2t) + t^2 \cos(t), \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.}$$