TD : Equation différentielle du second ordre

14 avril 2020

Exercice 1 : Equations homogènes

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' - 5y' + 6y = 0$
- $y'' + y = 0$
- $y'' - 4y' + 3y = 0$
- $y'' + 4y' + 13y = 0$

- Solution $y(x) = K_1e^{2x} + K_2e^{3x}$
- Solution $y(x) = K_1sin(x) + K_2cos(x)$
- Solution $y(x) = K_1e^{x} + K_2e^{3x}$
- Solution $y(x) = K_1e^{-2x}sin(3x) + K_2e^{-2x}cos(3x)$

Exercice 2 : Equations différentielles

Résoudre les equations différentielles suivantes :

- $y'' - 5y' + 6y = e^x$
- $y'' + y = cos(2x)$
- $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x$
- $y'' - 2y' + 5y = xe^x$
- $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3$

- Solution $y(x) = K_1e^{-x} + K_2e^{6x} + \frac{1}{2}e^x$
- Solution $y(x) = K_1cos(x) + K_2sin(x) - \frac{1}{3}cos(2x)$
- Solution $y(x) = K_1e^{x} + K_2e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$
- Solution $y(x) = (K_1cos(2x) + K_2(sin(2x))e^x + \frac{1}{4}xe^x$
- Solution $y_H(x) + y_P = K_1e^{x} + K_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

Exercice 3 : Problèmes de Cauchy

Résoudre les equations différentielles suivantes telle que :

- $y'' - y = cos(2x)$ avec $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$
- $y'' - 4y' + 3y = 2e^x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

- Solution $y(x) = \frac{3}{5}e^x + \frac{1}{10}e^{-x} - \frac{1}{5}cos(2x)$
- Solution $y(x) = -e^{-x} + e^{3x} - xe^x$

Corrigé :

— Exercice 1 : Equation 2

$y'' + y = 0$
Equation caractéristique :

$$X^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4$$

$$X_1 = \frac{-0 - i\sqrt{4}}{2} = -i$$

$$X_2 = \frac{-0 + i\sqrt{4}}{2} = +i$$

$$y(x) = K_1 e^{-ix} + K_2 e^{ix}$$

On peut écrire $y(x)$ sous la forme

$$y(x) = Acos(x) + Bsin(x)$$

On a $cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
$sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
Démonstration de l'équivalence des deux expressions :

$$Acos(x)+Bsin(x) = A(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})+B(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}) = \frac{Ae^{ix}+Ae^{-ix}}{2}+\frac{Be^{ix}-Be^{-ix}}{2i} = e^{ix}(\frac{A}{2}+\frac{B}{2i})+e^{-ix}(\frac{A}{2}-\frac{B}{2i})$$

$= K_2 e^{ix} + K_1 e^{-ix}$
avec $K_1 = \frac{A}{2} - \frac{B}{2i}$ et $K_2 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2i}$

— Exercice 1 : Equation 4

$y'' + 4y' + 13y = 0$ Etape 1 Equation caractéristique : $X^2 + 4X + 13 = 0$
$\Delta = 16 - 4 \times 13 = -36$
Solutions : $X_1 = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4-6i}{2} = -2 - 3i$
$X_2 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4+6i}{2} = -2 + 3i$
$y_H(x) = K_1 e^{X_1 x} + K_2 e^{X_2 x} = K_1 e^{(-2-3i)x} + K_2 e^{(-2+3i)x} = e^{-2x}(K_1 e^{-3ix} + K_2 e^{3ix})$
$= e^{-2x}(Acos(3x) + Bsin(3x))$

— Exercice 2 : Equation 1

$y'' - 5y' - 6y = e^x$
Etape 1 Résoudre équation homogène : $y'' - 5y' - 6y = 0$
Equation caractéristique : $X^2 - 5X - 6 = 0$
Résoltion équation du seconde degré : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49$
Solutions : $X_1 = \frac{-b-\sqrt(\Delta)}{2a} = \frac{5-7}{2} = -1$
$X_2 = \frac{-b+\sqrt(\Delta)}{2a} = \frac{5+7}{2} = 6$
$y_H(x) = K_1e^{X_1x} + K_2e^{X_2x} = K_1e^{6x} + K_2e^{-x}$
Solutions particulières : Second membre est de la forme exponentielle, la solution particulière sera de la forme exponentielle $y_P(x) = Ae^x$. On procède par identification

$(Ae^x)'' - 5 \times (Ae^x)' + 6(Ae^x) = e^x$
$Ae^x - 5 \times Ae^x + 6Ae^x = e^x$
$A - 5A + 6A = 1$
$A = \frac{1}{2}$
Solution totale : $y_H(x) + y_P = K_1e^{-6x} + K_2e^x + \frac{1}{2}e^x$

— Exercice 2 Equation 5
$y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3$
Etape 1 Résoudre équation homogène : $y'' - 3y' + 2y = 0$
Equation caractéristique : $X^2 - 3X + 2 = 0$
$\Delta = 9 - 4 * 2 = 1$

Solutions : $X_1 = \frac{-b-\sqrt(\Delta)}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt(\Delta)}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$
$y_H(x) = K_1e^{X_1x} + K_2e^{X_2x} = K_1e^x + K_2e^{2x}$

Solutions particulières : Second membre est de la forme polynomiale, la solution particulière sera de la forme polynomiale $y_P(x) = Ax^2 + Bx + C$. On procède par identification
$y_p'(x) = 2Ax + B$
$y_p''(x) = 2A$

$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 3$
$2Ax^2 + (-6A + 2B)x + (2A - 3B + 2C) = x^2 - 3$
$2A = 1$
$-6A + 2B = 0$
$2A - 3B + 2C = -3$
$A = \frac{1}{2}$
$B = \frac{3}{2}$
$C = \frac{1}{4}$
$y_P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$
Solution totale : $y_H(x) + y_P = K_1e^x + K_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

— Exercice 3 : Equation 1
$y'' - y = cos(2x)$ avec $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$
$y'' - y = cos(2x)$ avec $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$
Etape 1 : Résoudre équation sans seconde membre : $y'' - y = 0$
Equation caractéristique : $X^2 - 1 = 0$
Résoltion équation du seconde degré : $(X+1)(X-1) = 0$
Solutions : $X_1 = -1$
$X_2 = +1$
$y_H(x) = K_1 e^{X_1 x} + K_2 e^{X_2 x} = K_1 e^{-x} + K_2 e^{x}$
Solutions particulières : Second membre est de la forme sinusoïdale, la solution particulière sera de la forme sinusoïdale $y_P = Acos(2x) + Bsin(2x)$. On procède par identification

$$(Acos(2x) + Bsin(2x))'' - (Acos(2x) + Bsin(2x)) = cos(2x)$$

$$-4Acos(2x) - 4Bsin(2x) - Acos(2x) - Bsin(2x) = cos(2x)$$

$$-5Acos(2x) - 5Bsin(2x) = cos(2x)$$

$-5B = 0$ et $-5A = 1$ $B = 0$ et $A = -\frac{1}{5}$
$y_P = -\frac{1}{5}cos(2x)$ Vérification $(y_p'' - y_p = cos(2x))$
Solution totale : $y(x) = K_1 e^{-x} + K_2 e^{x} - \frac{1}{5}cos(2x)$
$y'(x) = -K_1 e^{-x} + K_2 e^{x} - \frac{1}{5} \times (-2sin(2x))$

$y'(x) = -K_1 e^{-x} + K_2 e^{x} + \frac{2}{5} \times sin(2x)$
$y(0) = K_1 e^{0} + K_2 e^{0} - \frac{1}{5}cos(0) = \frac{1}{2}$
$K_1 + K_2 - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$
$y'(0) = -K_1 e^{0} + K_2 e^{0} + \frac{2}{5} \times sin(0) = \frac{1}{2}$

$-K_1 + K_2 = \frac{1}{2}$
$K_1 + K_2 - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$ ce qui donne $K_1 = 1/10$ et $K_2 = 3/5$

$y' + ty = exp(t - t^2/2)$
Solution homogène : $y' + ty = 0$
$y_H(t) = Cexp(-t^2/2)$
Solution particulière : $y_P(t) = C(t)exp(-t^2/2)$ (Méthode de variation de la constante)
$y'_P + ty_P = exp(t - t^2/2)$

$C'(t)exp(-t^2/2) - tC(t)exp(-t^2/2) + tC(t)exp(-t^2/2) = exp(t - t^2/2)$

$C'(t)exp(-t^2/2) = exp(t - t^2/2)$

$C'(t) = exp(t)$

$C(t) = \int e^t \, \mathrm{d}t = e^t + C_0$ où C_0 est une constante réelle que l'on peut prendre nulle car elle réapparait en effet dans la solution de l'équation homogène. On déduit une solution particulière :

$y_p(t) = C(t)exp(-t^2/2) = e^{t-t^2/2}$

Solution générale : $y(t) = Cexp(-t^2/2) + exp(t - t^2/2)$