Exercices du chapitre I - Corrections

Exercice 1 – Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

f	$\partial f/\partial x$	$\partial f\partial y$	$\partial f\partial z$
$3x-8y+4$	3	-8	$--$
$4x^2-5y^2+5/x-2$	$8x-5/x^2$	$-10y$	$--$
$3x^2y^4z$	$6xy^4z$	$12x^2y^3z$	$3x^2y^4$
$-x^2y+3xy+8xy^2-1$	$-2xy+3y+8y^2$	$-x^2+3x+16xy$	$--$
$\sqrt{3x+2y}$	$\frac{3}{2\sqrt{3x+2y}}$	$\frac{1}{\sqrt{3x+2y}}$	$--$
x/y	$1/y$	$-x/y^2$	$--$
$e^{x/y}$	$(1/y)e^{x/y}$	$-x/y^2e^{x/y}$	$--$
$\ln(xy)$	$1/x$	$1/y$	$--$
$\sin(x-4y)e^{x^3y}$	$\cos(x-4y)e^{x^3y}$ $+3x^2y\sin(x-4y)e^{x^3y}$	$-4\cos(x-4y)e^{x^3y}$ $+x^3\sin(x-4y)e^{x^3y}$	$--$
$\cos(x^2y)\ln(1+x^2+y^3)$	$-2xy\sin(x^2y)\ln(1+x^2+y^3)$ $+\frac{2x\cos(x^2y)}{1+x^2+y^3}$	$-x^2\sin(x^2y)\ln(1+x^2+y^3)$ $+\frac{3y^2\cos(x^2y)}{1+x^2+y^3}$	

Exercice 2 – On considère la fonction suivante: $f(x,y)=x\cos(xy)+2$

1. Calculer les dérivées partielles de f

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}\cos(xy)+x\frac{\partial\cos(xy)}{\partial x}\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\frac{\partial\cos(xy)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\cos(xy)-xy\sin(xy)\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-x^2\sin(xy)$$

2. Donner une équation du plan tangent à la surface représentant f au dessus du point $(1,\pi/2)=$ donner une équation du plan tangent à la surface représentant f au point $(x_0,y_0,z_0)=(1,\pi/2,2)$ $(z_0=f(x_0,y_0)=2)$:

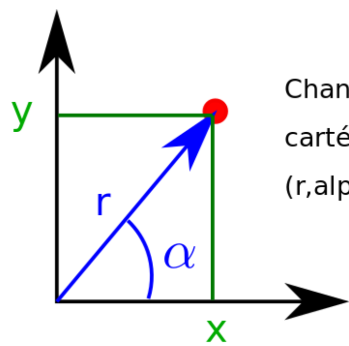
$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-(z-z_0)=0$$
$$(x-1)\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)(-1)-(z-2)=0\qquad \text{car } \frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi/2)=-\pi/2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi/2)=-1$$
$$-(x+y+z)+\pi+2=0$$
$$x+y+z=\pi+2$$

Exercice 3 –

1. $j(x,y) = u^2\cos(v)$ où $u = 2x+y$ et $v = \ln x - y$
$\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial j}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$
$\frac{\partial j}{\partial x} = [2u\cos(v)][2] + [-u^2\sin v][\frac{1}{x}]$
$\frac{\partial j}{\partial x} = 4(2x+y)\cos(\ln x - y) + -\frac{(2x+y)^2}{x}\sin(\ln x - y)$

2. Soit la fonction $f(x,y) = e^x \sin y$. Nous allons faire le changement des coordonnées cartésiennes (x,y) en coordonnées polaires (r,α): $x(r,\alpha) = r\cos(\alpha)$, $y(r,\alpha) = r\sin(\alpha)$ (voir figure en dessous) et obtenir $F(r,\alpha) = f(x(r,\alpha), y(r,\alpha))$:

$$\begin{aligned} F(r,\alpha) &= f(x(r,\alpha), y(r,\alpha)) \\ F(r,\alpha) &= e^{x(r,\alpha)}\sin(y(r,\alpha)) \\ F(r,\alpha) &= e^{r\cos(\alpha)}\sin(r\sin(\alpha)) \end{aligned}$$



On obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(r,\alpha)}{\partial r} &= \frac{\partial e^{r\cos(\alpha)}}{\partial r}\sin(r\sin(\alpha)) + e^{r\cos(\alpha)}\frac{\partial \sin(r\sin(\alpha))}{\partial r} \\ &= (e^{r\cos(\alpha)})'\frac{\partial r\cos(\alpha)}{\partial r}\sin(r\sin(\alpha)) + e^{r\cos(\alpha)}(\sin(r\sin(\alpha)))'\frac{\partial r\sin(\alpha)}{\partial r} \\ &= e^{r\cos(\alpha)}\cos(\alpha)\sin(r\sin(\alpha)) + e^{r\cos(\alpha)}\cos(r\sin(\alpha))\sin(\alpha) \\ &= e^{r\cos(\alpha)}\left(\cos(\alpha)\sin(r\sin(\alpha)) + \sin(\alpha)\cos(r\sin(\alpha))\right) \\ &= e^{r\cos(\alpha)}\sin(\alpha + \sin(r\sin(\alpha))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(r,\alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial e^{r\cos(\alpha)}}{\partial \alpha}\sin(r\sin(\alpha)) + e^{r\cos(\alpha)}\frac{\partial \sin(r\sin(\alpha))}{\partial \alpha} \\ &= (e^{r\cos(\alpha)})'\frac{\partial r\cos(\alpha)}{\partial \alpha}\sin(r\sin(\alpha)) + e^{r\cos(\alpha)}(\sin(r\sin(\alpha)))'\frac{\partial r\sin(\alpha)}{\partial \alpha} \\ &= -e^{r\cos(\alpha)}r\sin(\alpha)\sin(r\sin(\alpha)) + e^{r\cos(\alpha)}\cos(r\sin(\alpha))r\cos(\alpha) \\ &= re^{r\cos(\alpha)}\left(-\sin(\alpha)\sin(r\sin(\alpha)) + \cos(r\sin(\alpha))\cos(\alpha)\right) \\ &= re^{r\cos(\alpha)}\cos(\alpha + r\sin(\alpha)) \end{aligned}$$

Exercice 4 – Soit la fonction $f(x,y) = \frac{y}{x^2+1}$.

1. On détermine $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\overrightarrow{j}$, si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont respectivement les vecteurs normés de l'axe des x et de l'axe des y.
On obtient:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+1)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2+1}$$

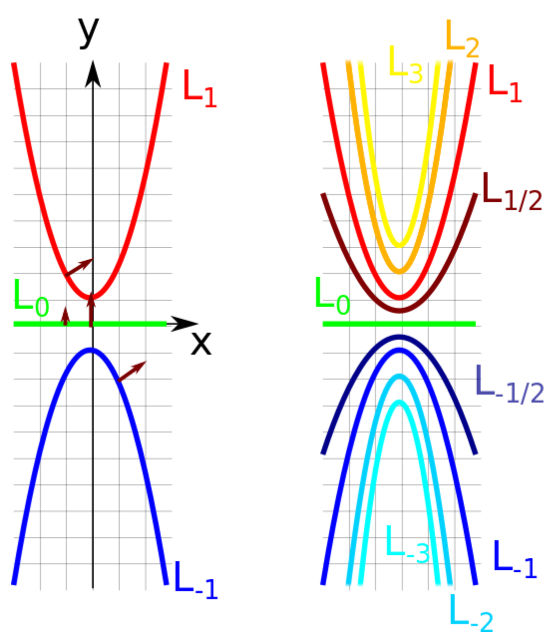
D'où,

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = \left(\frac{-2xy}{(x^2+1)^2}, \frac{1}{x^2+1}\right)$$

2. La ligne de niveaux L_a pour une valeur a représente l'ensemble des points (x,y) telles que $f(x,y) = a$ $\iff L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = a\}$. Ainsi (voir la figure):

   - $(x,y) \in L_0 \iff f(x,y) = 0 \iff \frac{y}{x^2+1} = 0 \iff y = 0$. $\frac{1}{x^2+1}$ ne sera en effet jamais nul car $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2+1} \in]0,1]$ (Pour finir de se convaincre si $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \frac{1}{x_0^2+1} = 0$, alors $\frac{1}{x_0^2+1} = 0 \iff \frac{1}{x_0^2+1}(x_0^2+1) = 0 \cdot (x_0^2+1) \iff 1 = 0$, ce qui est impossible et constitue une démonstration par l'absurde). L_0 s'identifie donc à l'axe des x (vert).
   - $(x,y) \in L_1 \iff f(x,y) = 1 \iff \frac{y}{x^2+1} = 1 \iff y = (x^2+1)$, ce qui décrit une parabole (rouge).
   - $(x,y) \in L_{-1} \iff f(x,y) = -1 \iff \frac{y}{x^2+1} = -1 \iff y = -(x^2+1)$, ce qui décrit une parabole (bleu).

   Plus généralement, on peut remarquer que pour avoir $f(x,y) = a$, cela revient à avoir $y = a(x^2+1)$. Les lignes de niveaux seront donc toutes des paraboles, la ligne L_0 pour $a = 0$ s'identifiant à l'axe des x.



3. On note que: $(0,0) \in L_0$, $(-1,0) \in L_0$, $(-1,2) \in L_1$ et $(1,-2) \in L_{-1}$. Les gradients en ces points sont donc orthogonaux aux lignes de niveaux respectives et pointent en direction d'une croissance de f. Pour avoir également la norme du gradient qui représente l'intensité de la variation de f, le calcul donne:

   - $\overrightarrow{\text{grad}} f(0,0) = (0,1) \qquad \overrightarrow{\text{grad}} f(-1,0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

- $\overrightarrow{\text{grad}}f(-1,2) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $\overrightarrow{\text{grad}}f(1,-2) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Graphiquement, plus les lignes de niveaux (espacées d'un même écart de valeur, par exemple L_1, L_2, L_3 qui sont espacées de 1) sont rapprochées, plus le gradient va avoir une norme forte (=forte croissance de f pour passer d'une valeur à l'autre).

Exercice 5 –

- On considère la fonction $f_1(x,y) = x^2\ln(y) + 2\frac{\cosh(x)}{\sinh(y)} + x\sin(y^2-1) + 2$. Ses dérivées partielles sont:

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x}\ln(y) + \frac{2}{\sinh(y)}\frac{\partial\cosh(x)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x}\sin(y^2-1)$$
$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = 2x\ln(y) + \frac{2\sinh(x)}{\sinh(y)} + \sin(y^2-1)$$

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = x^2\frac{\partial\ln(y)}{\partial y} + 2\cosh(x)\frac{\partial(\sinh(y))^{-1}}{\partial y} + x\frac{\partial\sin(y^2-1)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{y} - \frac{2\cosh(x)\cosh(y)}{\sinh^2(y)} + 2xy\cos(y^2-1)$$

- On considère la fonction $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Le gradient de f en (x,y) est,

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y) = \left(\frac{\partial e^{x^2}}{\partial x}e^{y^2}, e^{x^2}\frac{\partial e^{y^2}}{\partial y}\right)$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y) = \left(2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}\right)$$

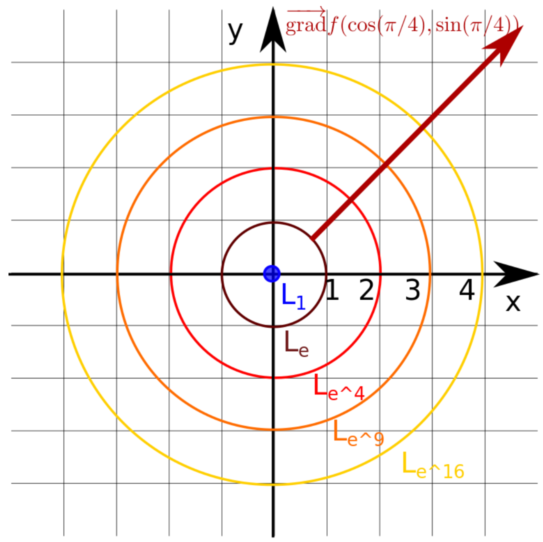
Pour tracer les lignes de niveau L_0, L_1, L_{e^4}, déterminons d'abord leurs équations:

  - $(x,y) \in L_0 \iff f(x,y) = 0 \iff e^{x^2+y^2} = 0 =$ impossible, la fonction exponentielle e^u ne peut pas prendre 0 comme valeur, quel que soit la valeur de u. L_0 est l'ensemble vide, elle ne contient aucun point.
  - $(x,y) \in L_1 \iff f(x,y) = 1 \iff e^{x^2+y^2} = 1 \iff \ln(e^{x^2+y^2}) = \ln(1) \iff x^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$. L_1 est réduit à un point $(0,0)$ (=le cercle de rayon 0 autour de l'origine $(0,0)$).
  - $(x,y) \in L_{e^4} \iff f(x,y) = e^4 \iff e^{x^2+y^2} = e^4 \ln(e^{x^2+y^2}) = \ln(e^4) \iff x^2+y^2 = 4$. L_{e^4} est le cercle de rayon 2 autour de l'origine $(0,0)$.

Plus généralement, on peut remarquer que pour avoir $f(x,y) = a$, cela revient à avoir $x^2+y^2 = \ln(a)$. Comme $x^2+y^2 \geq 0$[1], les lignes de niveaux différentes de l'ensemble vide sont donc les lignes de niveaux pour lesquelles $a \geq 1$ tel que $x^2+y^2 = \ln(a) \geq 0$ et s'identifient à des cercles de rayon $\sqrt{\ln(a)}$ autour de l'origine.

[1] Et $x^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$. En effet, $(x,y) = (0,0) \implies x^2+y^2 = 0$ est immédiat. Démontrons $x^2+y^2 = 0 \implies (x,y) = (0,0)$: On suppose $\exists(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, x_0^2+y_0^2 = 0$, alors $x_0^2+y_0^2 \geq x_0^2 > 0$ (car $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq 0$), ce qui est impossible car $x_0^2+y_0^2 = 0$, donc il n'existe pas de tel (x_0,y_0).

On peut remarquer que, contrairement à l'excercice 4, les gradients sur une ligne de niveau donnée ($(x,y) \in L_a \implies x^2+y^2 = \ln(a)$) ont tous la même norme ($= 2\sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2} = 2a\sqrt{\ln(a)}$). Sur le graphique, leur direction est donnée par la normale à la tangente qui pointe vers les valeurs croissantes de f.



Exercice 6 – Le point de coordonnées $(3,-1)$ appartient à la ligne L_{10} de la fonction f et $\overrightarrow{\text{grad}} f(3,-1) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

1. L'équation de la tangent à la ligne de niveau 10 au point $(3,-1)$ s'écrit (voir fiche):

$$(x-3)\frac{\partial f}{\partial x}(3,-1) + (y+1)\frac{\partial f}{\partial y}(3,-1) = 0$$

Comme $\overrightarrow{\text{grad}} f(3,-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(3,-1)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(3,-1)\overrightarrow{j} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, alors on obtient comme équation de la tangente à la ligne de niveau 10 au point $(3,-1)$:

$$\begin{aligned} 2(x-3) - (y+1) &= 0 \\ 2x - y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que l'équation de la tangente à la ligne de niveau 10 au point $(3,-1)$ peut aussi être formulée comme: $\overrightarrow{\text{grad}} f(3,-1) \cdot \overrightarrow{\Delta x}$, avec $\overrightarrow{\Delta x} = (x-3)\overrightarrow{i} + (y+1)\overrightarrow{j}$, et dériver son expression en fonction de x et y de là.

2. Le point $(x_0, y_0) = (3,-1)$ appartient à la ligne de niveau L_{10} et donc $z_0 = f(x_0,y_0) = 10$. L'équation cartésienne du plan tangent à la surface représentative de f au point $(x_0,y_0) = (3,-1)$ est donc:

$$\begin{aligned} (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) - (z-z_0) &= 0 \\ (x-3)\frac{\partial f}{\partial x}(3,-1) + (y+1)\frac{\partial f}{\partial y}(3,-1) - (z-10) &= 0 \\ 2x - y - 7 - (z-10) &= 0 \\ 2x - y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 7 – $f(x,y) = (x^2+1)y + (x+y)(x+1)\sin(y^2+xy-6)$

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + (2x+y+1)\sin(y^2+xy-6) + y(x+y)(x+1)\cos(y^2+xy-6)$
   $\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+1) + (x+1)\sin(y^2+xy-6) + (2y+x)(x+y)(x+1)\cos(y^2+xy-6)$

2. $\overrightarrow{\text{grad}} f(1,2) = 16\vec{i} + 32\vec{j}$

3. $f(1,2) = 4$. Donc l'équation est: $16(x-1) + 32(y-2) - (z-4) = 0$, i.e. $16x + 32y - z = 76$

Exercice 8 – $f(x,y) = e^{x^2+y^2-2y}$

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2-2y}$
   $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)e^{x^2+y^2-2y}$

2. $\overrightarrow{\text{grad}} f(0,0) = -2\vec{j}$

3. $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2-2y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (y-1)^2 = 1\}$. Donc c'est le cercle de rayon 1 et ayant pour centre $(0,1)$. Sa tangente en $(0,0)$ est donc orthogonale au rayon, qui est suivant $\vec{j}$ (cohérent avec la question précédente). Elle a pour équation: $y = 0$.

Exercice 9 – $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) + \frac{-2x}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$
   $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) + \frac{-2y}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$
   $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0,y_0) = (2x_0\sin(\frac{1}{x_0^2+y_0^2}) + \frac{-2x_0}{x_0^2+y_0^2}\cos(\frac{1}{x_0^2+y_0^2}))\vec{i} + (2y_0\sin(\frac{1}{x_0^2+y_0^2}) + \frac{-2y_0}{x_0^2+y_0^2}\cos(\frac{1}{x_0^2+y_0^2}))\vec{j}$

2. $f(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}) = \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$
   La tangente en P a pour équation: $(x - \frac{1}{\sqrt{\pi}})\frac{2}{\sqrt{\pi}} + (y - \frac{1}{\sqrt{\pi}})\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0$ ie $x + y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

3. La surface représentative en $(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{2}{\pi})$ a pour équation: $x + y - z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}})$

Exercice 10 – Soit $f_{x,y}(t) = x^2t^2 + (x+y)t + 1$,t $x \neq 0$, et $F(x,y) = \min t \in \mathbb{R} f_{x,y}(t)$. On veut calculer $F(x,y)$ et ses dérivées partielles. Pour trouver le minimum de $f_{x,y}(t)$, on peut appliquer la méthode générale de trouver les zéros de la dérivée $f_{x,y}(t)'$ et examiner lesquels sont minimaux ($f_{x,y}(t)' = 0$ et $f_{x,y}(t)'' > 0$):

$$f_{x,y}(t_0)' = 2x^2t_0 + (x+y) = 0 \iff t_0 = -\frac{(x+y)}{2x^2}$$

Et,

$$f_{x,y}(t_0)'' = 2x^2 > 0 \text{ car } x \neq 0$$

Donc, on obtient: $F(x,y) = -\dfrac{x+y}{2x^2}$. On pouvait aussi dériver ce résultat plus facilement en exploitant un résultat bien connu sur les polynômes du second degré (car $f_{x,y}$ en est un). Ainsi, le minimum d'un polynôme du second degré $p(z) = az^2 + bz + c$ est en $-b/2a$ (on se place dans le cas $a > 0$, si $a < 0$, alors $-b/2a$ est un maximum).
Ce résultat peut être retrouvé par la méthode de la dérivée ou en remarquant qu'un polynôme du second degré est symétrique par rapport à son minimum ($p(z = z_{\min} + \delta z) = p(z' = z_{\min} - \delta z), \forall \delta z$), donnant pour $\delta x \neq 0$: $a(z_{\min}+\delta z)^2 + b(z_{\min}+\delta z) + c = a(z_{\min}-\delta z)^2 + b(z_{\min}-\delta z) + c \iff a(2\delta z)(2z_{\min}) + 2b\delta z = 0 \iff z_{\min} = -b/2a$.

Calculons maintenant les dérivées partielles de F:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial\left(\frac{x+y}{2x^2}\right)}{\partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial\left(\frac{x+y}{2x^2}\right)}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2x^2}\frac{\partial(x+y)}{\partial x}(x,y) - \frac{x+y}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2x^2}\frac{\partial(x+y)}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{(x+y)}{x^3} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2x^2}$$

Les dérivées partielles de F indiquent comment bouge le minimum de la parabole si on change x et y.

Exercice 11 – On considère $F(x,y) = e^x + e^y + x + y - 2$ et $\phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables où I est un intervalle ouvert contenant 0. On pose $h(x) = F(x, \phi(x))$.

1. Calculons $h'(x)$:

$$h'(x) = (F(x,\phi(x)))' = \frac{\partial F(x,\phi(x))}{\partial x}x' + \frac{\partial F(x,\phi(x))}{\partial y}(\phi(x))'$$
$$h'(x) = 1 + e^x + (1 + e^{\phi(x)})\phi(x)'$$

   Calculons $h''(x)$:

$$h''(x) = \big(h'(x)\big)' = e^x + (1 + e^{\phi(x)})\phi(x)'' + e^{\phi(x)}(\phi(x)')^2$$

2. On suppose que ϕ vérifie: $e^x + e^{\phi(x)} + x + \phi(x) = 2$, pour tout $x \in I$. On remarque que, pour tout $x \in I$, $e^x + e^{\phi(x)} + x + \phi(x) = 2 = h(x) + 2$, donc $h(x) = 0$ et h est la fonction constante égale à 0 et donc, pour tout $x \in I$, $h'(x) = 0$ et $h''(x) = 0$.

   En $x = 0$, on a alors:

$$\begin{cases} e^{\phi(0)} + \phi(0) = 1 & (1)(\iff h(0) = 0) \\ 2 + (1 + e^{\phi(0)})\phi(0)' = 0 & (2)(\iff h'(0) = 0) \\ 1 + (1 + e^{\phi(0)})\phi(0)'' + e^{\phi(0)}(\phi(0)')^2 = 0 & (3)(\iff h''(0) = 0) \end{cases}$$

   (1) peut être réécrit comme $v(\phi(0)) = 1$ avec v la fonction $v(y) = e^y + y$. v est une fonction strictement croissante et continue donc v est monotone et pour x réel il existe un unique y réel tel que $v(y) = x$.
   (1) donne alors $\phi(0) = 0$, trouvable par test ou en traçant les fonctions e^x et $1 - x$ et voir où elles s'intersectent et vérifier alors qu'en ce point x, $v(x) = 1$. On peut encore démontrer par l'absurde: si $\phi(0) > 0$, alors $e^{\phi(0)} > 1$ mais $1 - \phi(0) < 1$, donc $\phi(0) \leq 0$. Et si $\phi(0) < 0$, alors $e^{\phi(0)} < 1$ mais $= 1 - \phi(0) > 1$, donc on obtient $\phi(0) = 0$.

Cela mène à,

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 & (1) \\ 2 + 2\phi(0)' = 0 & (2) \\ 1 + 2\phi(0)'' + (\phi(0)')^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 & (1) \\ \phi(0)' = -1 & (2) \\ 1 + 2\phi(0)'' + (\phi(0)')^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 & (1) \\ \phi(0)' = -1 & (2) \\ \phi(0)'' = -1 & (3) \end{cases}$$