Exercices du chapitre II - Équations différentielles linéaires

Exercice 1 – Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

$$y' + 2y = 3, \qquad y' - y = e^x(\cos x - x), \qquad y' + 2y = x, \qquad y' + 3y = x\ln(x)e^{-3x}.$$

Exercice 2 – Une population de bactéries croît à une vitesse proportionnelle à sa taille. Cette taille est multipliée par 8 en 1 heure. Au bout de combien de temps a-t-elle été multipliée par 4 ? Au bout de combien de temps (arrondi à la minute prés) sera-t-elle multipliée par 1000 ?

Exercice 3 – Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en $\mathrm{g{\cdot}L^{-1}}$) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = ae^{-t}$, où $t \geq 0$ est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures) et a est une constante qui dépend des conditions expérimentales.

a) Exprimer f en fonction de t et de a.

b) On fixe $a = 5$. étudier les variations de f et tracer sa courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

c) Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0.5\,\mathrm{g{\cdot}L^{-1}}$.

Exercice 4 – Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y'' - 4y' + 8y = 0, \qquad y'' - 4y' = 0.$$

Exercice 5 – La variation de la température θ d'un liquide, laissé dans un environnement à une température ambiante constante, suit la loi de Newton :

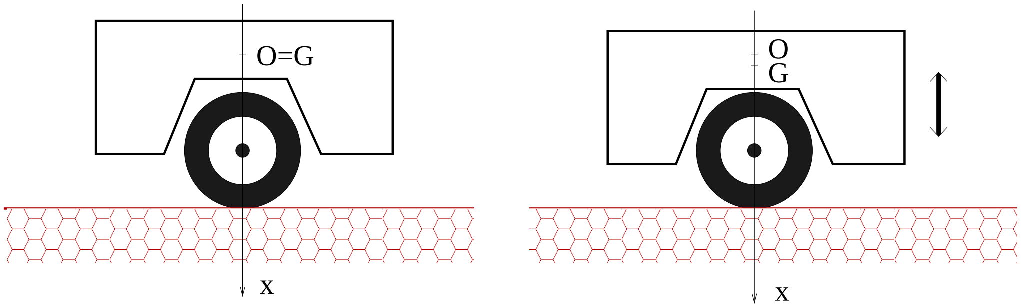
$$\theta'(t) = \lambda(\theta_a - \theta(t)), \tag{1}$$

où θ_a est la température ambiante, λ est une constante de proportionnalité qui dépend des conditions expérimentales et t est le temps, donné en minutes.

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation (1) en fonction des paramètres λ et θ_a.

Un verre d'eau, à 10^oC, est sorti du réfrigérateur et déposé sur une table dans une pièce où il fait 31^oC. Après 10 minutes, l'eau dans le verre est à 17^oC.

2. Utiliser les informations quantitatives données par l'énoncé pour évaluer le temps après la sortie du réfrigérateur pour que l'eau soit à 25^oC.



Exercice 6 – On souhaite étudier la suspension d'une remorque. Le centre d'inertie G de la remorque se déplace sur un axe vertical (Ox) dirigé vers le bas (unité : le mètre); il est repéré par son abscisse $x(t)$ en fonction du temps t exprimé en secondes. On suppose que cette remorque à vide peut être assimilée à une masse M reposant sans frottement sur un ressort.
L'abscisse $x(t)$ est alors, à tout instant t, solution de l'équation

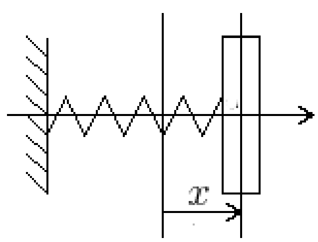
$$M\,x''(t) + k\,x(t) = 0, \qquad (2)$$

où k désigne la raideur du ressort. On prendra $M = 250\,\text{kg}$ et $k = 6250\,\text{N.m}^{-1}$.

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle (2) vérifiant les deux conditions initiales $x(0) = 0\,\text{m}$ et $x'(0) = -0.1\,\text{m.s}^{-1}$.

2. Préciser la période de cette solution.

Exercice 7 – Un objet de masse m est fixé à un ressort horizontal immergé dans un fluide (caractérisé par sa constante de raideur k et un coefficient d'amortissement c). On note $x(t)$ la position (horizontale) de l'objet par rapport à la position d'équilibre en fonction du temps t.



L'équation différentielle satisfaite par la fonction $x(t)$ est alors

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

On a utilisé ci-dessus la notation de Newton pour les dérivations : $\ddot{x} = x''$ et $\dot{x} = x'$.
On considère ici que $m = 2$, $c = 2$ et $k = 5$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

2. On suppose qu'au temps $t = 0$ on a $x(0) = 2$ et $\dot{x}(0) = 3\sqrt{3} - 1$. Exprimer la fonction $x(t)$ de deux façons équivalentes.

3. Quelle est la limite de $x(t)$ quand $t \to +\infty$?

4. Déterminer le plus petit temps $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) = 0$.

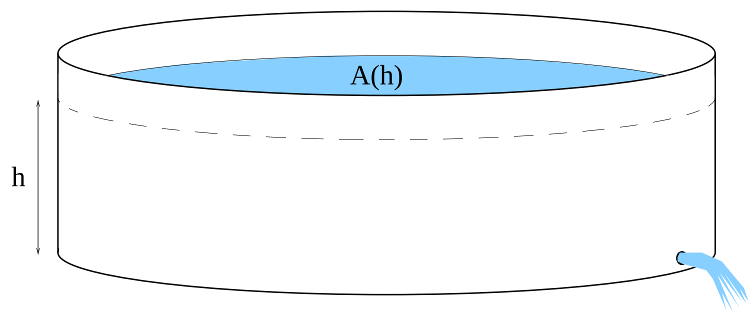
Exercices complémentaires

Exercice 8 – Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante : $y' - y = \cos(x)$.

Exercice 9 – La loi de Torricelli donne une relation entre la vitesse d'écoulement d'un liquide par l'orifice d'un récipient et la hauteur de liquide au-dessus de l'orifice.
Soit $h(t)$ la hauteur de liquide contenu dans le récipient au-dessus de l'orifice au temps t et $A(h)$ l'aire de la surface du liquide quand la hauteur du liquide est h. On a la relation :

$$A(h)h' = -k\sqrt{gh}, \tag{3}$$

où g est l'accélération de la pesanteur et k est une constante positive dépendant de certains facteurs, comme la viscosité du liquide et l'aire de la section du trou d'écoulement.



Au temps $t = 0$, une piscine de 2 mètres de rayon contient 1 mètre d'eau au dessus de l'orifice. La constante g vaut approximativement $9,8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ et la constante k vaut $0,01\,\mathrm{m}^2$.

1. Trouver $h(t)$ en résolvant l'équation (3) ainsi qu'en utilisant la hauteur d'eau initiale.
2. Après combien de minutes le réservoir arrêtera-t-il de se vider ?

Exercice 10 – Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

$$y' + y = e^x, \qquad y' + 2\,y = -2x + 3, \qquad y' - 2y = xe^{-x}, \qquad y' + 2\,y = x^2\,e^{-2x+2}.$$

Exercice 11 – On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5e^{-x}$.

a) Calculer la solution générale de (E).

b) Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 12 – Trouver une courbe du plan passant par le point $(0, 3)$ et dont la pente de la tangente aux points de coordonnées (x, y) est de $x + y$.

Exercice 13 – Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

$$y'' + y' - 6y = 0, \qquad y'' + 2y' + y = 0, \qquad y'' - 4y' + 13y = 0.$$

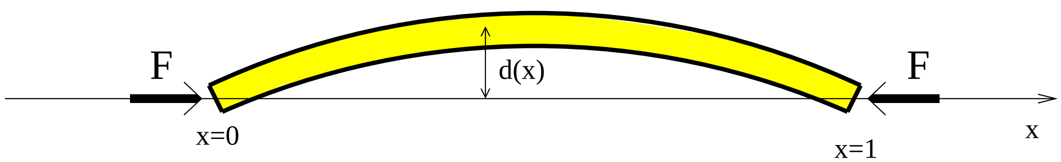
Exercice 14 – Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle du 1er ordre suivante :

$$y' - \frac{y}{x} = x^2.$$

Exercice 15 – On se propose d'étudier la déformation élastique d'une poutre. On soumet cette poutre à une force $\mathbf{F}$. On montre que la déformation élastique d qu'elle subit est une solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + \omega^2\, y(x) = -\omega^2\, \sin(\pi\, x), \tag{4}$$

et qu'elle est nulle pour $x = 0$ et $x = 1$. Le coefficient $\omega \in]0, \pi[$ est un coefficient dépendant de la force appliquée.



1. (a) Donner la solution générale de l'équation sans second membre $y'' + \omega^2\, y = 0$.
   (b) Déterminer k tel que la fonction $y_p(x) = k\sin(\pi\, x)$ soit une solution de l'équation (4).
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation (4).
2. (a) Exprimer la déformation élastique d en fonction de ω et de x.
   (b) Montrer que la déformation est maximale pour $x = 0.5$ et exprimer ce maximum en fonction de ω.