Exercices du chapitre II - Corrections (Fin)

<u>Conseil</u>: **Trouver une solution particulière peut se faire soit par la méthode de variation de la constante soit par reconnaissance d'une solution facile. Avant de se lancer, on vérifie donc que** $y = constante$, $y = x, x^2..x^n$, $y = \cos(x)$ **ou** $\sin(x)$ **(dans le cas où le second membre a des** cos **ou** sin**) ou, de manière générale,** y **de la même forme que** f **avec** f **le second membre, n'est pas solution. Bien entendu, ne pas perdre trop de temps à "deviner" .**
<u>Conseil</u>: **Après avoir trouvé les solutions d'une équation différentielle, faire une vérification rapide en vérifiant qu'elles sont bien solution peut permettre de trouver des erreurs de calculs facilement détectables.**
<u>Conseil</u>: **Attention aux unités des constantes et des résultats demandés**
<u>Conseil</u>: **Essayer de comprendre les implications physiques de ce que vous écrivez. Cela peut vous éviter de grosses erreurs!**

Exercice 1 –

$$y' + 2y = 3$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène. L'ensemble des solutions de l'équation homogène correspondante $y_h' + 2y_h = 0$ est $y_h(x) = Ke^{-2x}, K \in \mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière de l'équation $y_p' + 2y_p = 3$. Soit on en devine une (typiquement ici, on peut remarquer que dans le cas $y' + ay = b, (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $y_p(x) = b/a$ (=fonction constante donc $y_p'(x) = 0$) est solution!), soit on utilise la méthode de variation de la constante et on cherche une solution de la forme $y_p(x) = g(x)e^{-2x}$, ce qui revient à trouver g telle qu'elle soit une primitive de $3e^{2x}$ car (rappel):

$$\begin{aligned}(g(x)e^{-2x})' + 2g(x)e^{-2x} &= 3\\ g(x)'e^{-2x} - 2g(x)e^{-2x} + 2g(x)e^{-2x} &= 3\\ g(x)' &= 3e^{2x}\end{aligned}$$

On obtient alors $g(x) = \frac{3}{2}e^{2x}$ et $y_p(x) = \frac{3}{2}$ une solution particulière. L'ensemble des solutions est ainsi $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ke^{-2x} + \frac{3}{2}$. Il est alors intéressant de remarquer que les solutions y de l'équation $y' + ay = b$ décrivent une décroissance exponentielle vers la valeur stationnaire $y_s(x) = \frac{b}{a}$ (stationnaire $\iff y' = 0 \iff$ plus d'évolution).

$$y' - y = e^x(\cos x - x)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène. L'ensemble des solutions de l'équation homogène correspondante $y_h' - y_h = 0$ est $y_h(x) = Ke^x, K \in \mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière y_p de l'équation. On utilise la méthode de variation de la constante et on cherche une solution de la forme $y_p(x) = g(x)e^x$, ce qui revient à trouver g telle qu'elle soit une primitive de $(\cos x - x)$, donc $g(x) = \sin x - \frac{x^2}{2}$ et $y_p(x) = (\sin x - \frac{x^2}{2})e^x$
L'ensemble des solutions est ainsi $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (K + \sin x - \frac{x^2}{2})e^x$.

$$y' + 2y = x$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène. L'ensemble des solutions de l'équation homogène correspondante $y_h' + 2y_h = 0$ est $y_h(x) = Ke^{-2x}, K \in \mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière de l'équation $y_p' + 2y_p = x$. Soit on en devine une (typiquement ici, on peut remarquer que dans le cas $y' + ay = P(x)$ et P est un polynôme en x, on cherche y_p polynôme de même degré. Donc ici, $y_p = ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2$. En remplaçant dans l'équation, on obtient $2a = 1, a + b = 0$ et $y_p(x) = x - \frac{1}{2}$. Soit on utilise la méthode de variation de la constante et on cherche une solution de la forme $y_p(x) = g(x)e^{-2x}$, ce qui revient à trouver g telle qu'elle soit une primitive de xe^{2x}. On obtient alors $g(x) = \int xe^{2x}\mathrm{d}x = [\frac{1}{2}xe^{2x}] - \int \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x}$ par intégration par parties. Et alors, on a $y_p(x) = \frac{1}{2}(x-1)$ L'ensemble des solutions est ainsi $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ke^{-2x} + \frac{1}{2}(x-1)$.

$$y' + 3y = x\ln(x)e^{-3x}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène. L'ensemble des solutions de l'équation homogène correspondante $y_h' + 3y_h = 0$ est $y_h(x) = Ke^{-3x}, K \in \mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière y_p de l'équation. On utilise la méthode de variation de la constante et on cherche une solution de la forme $y_p(x) = g(x)e^{-3x}$, ce qui revient à trouver g telle qu'elle soit une primitive de $(x\ln(x)$, donc $g(x) = \int x\ln(x)\mathrm{d}x = [\frac{x^2}{2}\ln(x)] - \int \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}(\ln(x) - \frac{1}{2})$ par intégration par parties.
L'ensemble des solutions est ainsi $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (K + \frac{x^2}{2}(\ln(x) - \frac{1}{2}))e^{-3x}$.
Exercice 2 – Une population de bactéries croît à une vitesse proportionnelle à sa taille. On note sa taille à un instant t $N(t)$. La fonction $N(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante:

$$N'(t) = vN(t), v \in \mathbb{R}$$

C'est-à-dire que pendant un instant dt, la population aura bien cru d'une quantité $vN(t)$, qui est donc bien proportionnelle à la taille $N(t)$. Ici t est exprimée en heures (=h) et donc v est exprimé en h^{-1} (attention aux changements d'unités si vous voulez regarder le temps en minutes!). En résolvant cette équation homogène, on en conclue que $N(t) = Ke^{vt}, K \in \mathbb{R}$. C'est ce qu'on appelle une croissance exponentielle. Le propre de ce type de croissance est que pour multiplier la population par un facteur n, il faut attendre le même temps, quelque soit la taille de la population.. C'est donc une croissance extrêmement rapide et c'est ce que cet exercice va illustrer.

On aurait pu avoir un second membre à cette équation $N'(t) = vN(t) + f$, ce qui est le cas quand par exemple on modélise l'apport de nourriture dans le milieu qui contribue à la croissance de bactéries, f est alors appelé un terme "source".

On sait que cette taille est multipliée par 8 en 1 heure, donc:

$$\begin{cases} N(t=\tau) & = Ke^{v\tau} \\ N(t=\tau+1) & = Ke^{v(\tau+1)} \\ N(t=\tau+1) & = 8N(t=\tau) = 8Ke^{v\tau} \end{cases}$$

Cela nous permet de trouver que $8Ke^{v\tau} = Ke^{v(\tau+1)}$, c'est-à-dire $8 = e^v$ et $v = \ln(8)$ et donc $N(t) = K8^\tau$.

On veut trouver le temps τ_4 au bout duquel la population est multipliée par 4:

$$N(t = \tau + \tau_4) = K8^{(\tau+\tau_4)} = 4N(t = \tau) = 4 \cdot K8^\tau$$

ce qui donne $8^{\tau_4} = 4$, c'est-à-dire, $\tau_4 = \frac{\ln(4)}{\ln(8)} = \frac{2\ln 2}{3\ln 2} = \frac{2}{3}h$ (Attention aux unités! Ici le temps est exprimé en heures!).

On veut maintenant trouver le temps τ_{1000} au bout duquel la population est multipliée par 1000:

$$N(t = \tau + \tau_{1000}) = K8^{(\tau+\tau_{1000})} = 1000N(t = \tau) = 1000 \cdot K8^{\tau}$$

Comme précedemment, on obtient: $\tau_4 = \frac{\ln(1000)}{\ln(8)} = 1+\frac{\ln(125)}{\ln(8)} = 1+3\frac{\ln(5)}{\ln(8)}h \sim 3.32h \sim 3h19$ min (le résultat est demandé à la minute près). Pour comparaison, pour multiplier par 4, il faut attendre $2/3h = 40$ min.

Plus généralement, on vient de voir que dans les croissances exponentielles, le temps pour multiplier par n une population ne dépend pas de la taille de la population. Sachant cela, on peut voir rapidement que si en $1h$, on a une multiplication par 8 et que $8 = 2^3$ et $4 = 2^2$, il faut donc attendre 3 multiplications par 2 pour avoir une multiplication totale par 8 et 2 multiplications par 2 pour avoir une multiplication totale par 4.. donc la multiplication par 2 arrive au 1/3 de la multiplication par 8 et celle par 4 arrive au 2/3 de la multiplication par 8. De même, il faut exactement 1 multiplications par 8 et 3 multiplications par 5 pour arriver jusqu'à une multiplication totale par $1000 = 5^3 8$. On peut alors remarquer que $8^3 \cdot 2 = 512 \times 2 = 1024 > 1000$ et cela mettra exactement $3h20$ min pour atteindre 1024 et donc on aura déjà dépasser la multiplication par 1000.. qui arrive à $3h19$ min!

Exercice 3 – Le taux d'alcoolémie f (t) (en $g \cdot L^{-1}$) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = ae^{-t}$, où $t \geq 0$ est le temps écoulé après l'ingestion (**exprimé en heures**) et a est une constante qui dépend des conditions expérimentales. Cette équation traduit le fait que le corps va digérer l'alcool (terme source ae^{-t}, qui traduit la quantité d'alcool par litre de sang libérée par la digestion au cours du temps (notée la décroissance exponentielle.. au bout d'un moment, il n'y a plus d'alcool à digérer)). La quantité totale d'alcool initialement ingérée est donc $\int_0^{+\infty} ae^{-t}dt = [-ae^{-t}]_0^{+\infty} = a$), qui va alors être traitée par le foie et sortie du système. Ce mécanisme complet est modelisé par cette équation différentielle.

1. Résolvons cette équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène. Les solutions homogènes sont $y_h(t) = Ke^{-t}, K \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière: On peut utiliser la méthode de variation de la constante, ce qui nous amène à chercher les solutions de la forme $g(t)e^{-t}$, amenant à trouver g tel que $g'(t) = a$, c'est-à-dire $y_p(t) = ate^{-t}$. Les solutions sont donc $y(t) = (K + at)e^{-t}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Comme le taux d'alcoolémie est une quantité positive, on obtient alors $f(t) = (K_0 + at)e^{-t}$, avec $K_0 \in \mathbb{R}^+$ et, comme le taux d'alcoolémie au départ est égal à 0 car le sujet était à jeun, $f(0) = K_0 = 0$ et $f(t) = ate^{-t}$.

2. On fixe $a = 5$ (en $g \cdot L^{-1} \cdot h^{-1}$, pour être raccord avec les unités utilisées). On a $f'(t) = (a-at)e^{-t} = a(1-t)e^{-t}$. Le signe de f' est égal au signe de $f(1-t)$ et f' est donc strictement positif sur $t \in [0, 1[$, nul en $t = 1$ et strictement négatif sur $[1, +\infty[$ (t est exprimé en heures). On voit donc bien d'abord le mécanisme de digestion qui va augmenter le taux d'alcoolémie, jusqu'à ce que la digestion ralentisse et le nettoyage opéré par le foie prenne le dessus. Le taux d'alcoolémie maximal est donc $f(1) = 5e^{-1} \sim 1.84g \cdot L^{-1}$ et est atteint au bout d'une heure.

3. Pour obtenir T le délai à l'heure près par excès au bout duquel le taux d'alcoolémie est inférieur à $0.5g \cdot L^{-1}$, il suffit de calculer: $f(T) = 0.5 = 5Te^{-T}$ en contraignant $T \geq 1h$ (sur la partie décroissante de f et donc du taux d'alcoolémie) et de l'exprimer à l'heure près par excès.

   En s'aidant des points calculés pour le tracé de la fonction, on peut vérifier que, pour $t = 3h$, on obtient $f(3h) = 0.75g \cdot L^{-1}$ et pour $t = 4h$, on obtient $f(4h) = 0.37g \cdot L^{-1}$, donc $T = 4h$.

Exercice 4 – On résout les équations suivantes:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

On voit que la somme des racines est égale à 3 et leur produit à 2. On peut deviner que les racines sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Si on ne devine pas, on calcule le discriminant etc. Donc les solutions sont du type $y(t) = K_1e^{2t} + K_2e^{3t}, (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

On voit que l'équation caractéristique est $(X - 2)^2 = 0$ et on obtient $y(t) = (K_1 + K_2t)e^t, (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

On a $\Delta = -4^2 < 0$. On obtient $u = 2$ et $v = 2$ (voir fiche) et alors $y(t) = Re^{2t}\cos(2t + \phi)$.

$$y'' - 4y' = 0$$

On peut considérer cette équation comme une équation homogène du premier ordre en y', ce qui donne $y'(t) = K_0e^{4t}$, donc $y(t) = K_1e^{4t} + K_2, (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$. On peut aussi passer par la méthode classique des équations du second ordre, qui donne $\Delta = 4^2 > 0$ et trouver les racines ou voir que leur somme est égale à 4 et leur produit à 0, dans les deux cas on obtient les deux racines 4 et 0.

Exercice 5 – La variation de la température θ d'un liquide, laissé dans un environnement à une température ambiante constante, suit la loi de Newton : $\theta(t) = \lambda(\theta_a - \theta(t))$, où θ_a est la température ambiante, λ est une constante de proportionnalité qui dépend des conditions expérimentales et t est le temps, donné en minutes.

1. On cherche l'ensemble des solutions de l'équation $\theta'(t) + \lambda\theta(t) = \lambda\theta_a$ (θ_a est une constante). Les solutions homogènes sont décrites par $\theta_h(t) = Ke^{-\lambda t}, K \in \mathbb{R}$, et une solution particulière est $\theta_p(t) = \theta_a$ (solution stationnaire: $\theta_p' = 0$). On obtient donc $\theta(t) = Ke^{-\lambda t} + \theta_a$.

2. D'après les données, nous allons pouvoir déterminer la solution θ, paramétrée par K et λ correspondant au problème. On peut tout d'abord remplacer K. En effet à $t = 0$, $\theta(t = 0) = 10 = K + \theta_a = K + 31$, d'où $K = -21^oC$. On peut alors déterminer λ. On obtient $\theta(t = 10 \text{ min}) = 17 = 31 - 21e^{-10\lambda}$, ce qui donne $\lambda = -(\ln(14) - \ln(21))/10 = \ln(3/2)/10$ min(~ 0.04 min). Finalement, pour atteindre 25^oC, il faut attendre un temps t_{25} tel que $\theta(t = t_{25}) = 25 = 31 - 21e^{-t_{25}\ln(3/2)/10}$. On obtient alors: $t_{25} = -10\ln(6/21)/\ln(3/2) = -10\ln(2/7)/\ln(3/2) \sim 31$ min.

Exercice 6 – On souhaite étudier la suspension d'une remorque. Le centre d'inertie G de la remorque se déplace sur un axe vertical (Ox) dirigé vers le bas (unité : le mètre); il est repéré par son abscisse $x(t)$ en fonction du temps t exprimé en secondes. On suppose que cette remorque à vide peut être assimilée à une masse M reposant sans frottement sur un ressort. L'abscisse $x(t)$ est alors, à tout instant t, solution de l'équation $Mx''(t) + kx(t) = 0$, où k désigne la raideur du ressort. On prendra $M = 250kg$ et $k = 6250N.m^{-1}$.

1. On cherche la solution de l'équation différentielle vérifiant les deux conditions initiales $x(0) = 0m$ et $x'(0) = -0.1m.s^{-1}$ (elle correspond à un état de la suspension au repos à laquelle on vient d'imprimer une vitesse vers le bas (=on enfonce la suspension)). L'équation est linéaire et du second ordre avec un discriminant négatif ($\Delta = -4kM$). D'après les notations de la fiche $u = 0$ et $v = \sqrt{\frac{k}{M}}$ et on obtient $x(t) = R\cos(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \phi)$ et on détermine R et ϕ par les conditions initiales qui donnent: $R\cos(\phi) = 0$ et $-R\sqrt{\frac{k}{M}}\sin(\phi) = -0.1$. $R = 0$ ne peut pas être solution (car sinon $-R\sqrt{\frac{k}{M}}\sin(\phi) = 0.$), donc $\phi = \pi/2$ et $R = 0.1\sqrt{\frac{M}{k}} = 0.2m$ (**On vérifie toujours les unités, par exemple ici on a bien** $[x'(0)]\sqrt{[M]/[k]} = [m.s^-1]\sqrt{[kg]/[kg.s^{-2}]} = [m] = [R]$). Au final, la solution est $x(t) = -0.1\sqrt{\frac{M}{k}}\sin(\sqrt{\frac{k}{M}}t)$

2. La période de cette solution correspond au temps T après lequel la remorque repasse par le même point et avec la même vitesse, donc: $x(t) = x(t + T)$ donne $\sin(\sqrt{\frac{k}{M}}t) = \sin(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \sqrt{\frac{k}{M}}T)$ et $x'(t) = x'(t + T)$ donne $\cos(\sqrt{\frac{k}{M}}t) = \cos(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \sqrt{\frac{k}{M}}T)$. Comme c'est vrai pour tout t, on fixe $t = 0$, donnant $\sin(\sqrt{\frac{k}{M}}T) = 0$ et $\cos(\sqrt{\frac{k}{M}}T) = 1$, ce qui est vérifiée pour $\sqrt{\frac{k}{M}}T = 2\pi$, donnant $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ (bien exprimée en s). Ce résultat est logique car plus M, la masse, est grande, plus la suspension est inerte et bouge lentement (donc T est plus grande), et plus k, la raideur du ressort, est grande, plus le ressort retient la suspension et le mouvement de faible amplitude et T petite. On obtient $T = 1.26s$. On peut vérifier que la demi-période $T/2$ correspond à la durée entre deux passages par l'origine mais pas avec la même vitesse (un coup en descendant, un coup en montant).

   On remarquera que la solution ne décrit pas la réalité: une suspension ne se met pas à osciller jusqu'à la fin des temps à la moindre pression.. et c'est parce que nous n'avons pas pris en compte les frottements avec l'air qui viennent s'opposer au mouvement, transformant l'équation en ajoutant un terme du premier ordre: $Mx''(t) + \lambda x'(t) + kx(t) = 0$, avec $\lambda > 0$ (toujours pas de terme soucre, on ne continue pas à pousser la suspension et à apporter de l'énergie au sytème mais on pourrait le faire!). Avec ce terme du premier ordre, $u > 0$ n'est plus nul et il y a une décroissance exponentielle qui vient s'accoler et tuer l'oscillation petit à petit (en plus d'un changement de période, c'est-à-dire de v). Si les frottements sont très forts par rapport à M et k, on peut même être dans le cas $\Delta > 0$, où il n'y a plus d'oscillations du tout et simplement une décroissance exponentielle vers la position au repos $x = 0$.

Exercice 7 – Un objet de masse M est fixé à un ressort horizontal immergé dans un fluide (caractérisé par sa constante de raideur k et un coefficient d'amortissement c). On note $x(t)$ la position (horizontale) de l'objet par rapport à la position d'équilibre en fonction du temps t.

L'équation différentielle satisfaite par la fonction $x(t)$ est alors $Mx'' + cx' + kx = 0$. On considère ici que $M = 2kg$, $c = 2kg.s^{-1}$ et $k = 5kg.s^{-2} = 5N.m^{-1}$.

1. C'est une équation linéaire du second ordre homogène, avec un discriminant $\Delta = c^2 - 4km = -6^2 < 0$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc: $x(t) = R\cos(\sqrt{\frac{k-c^2/4M}{M}}t + \phi)e^{-\frac{c}{2M}t}, R \in \mathbb{R}, \phi \in [0, 2\pi]$ ou $x(t) = (K_1\cos(\sqrt{\frac{k-c^2/4M}{M}}t) + K_2\sin(\sqrt{\frac{k-c^2/4M}{M}}t))e^{-\frac{c}{2M}t}, (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. On suppose qu'au temps $t = 0$ on a $x(0) = 2m$ et $x'(0) = (3\sqrt{3} - 1)m.s^{-1}$. Cela donne: $K_1 = 2m$ et $-K_1c/2M + K_2\sqrt{\frac{k-c^2/4M}{M}} = (3\sqrt{3} - 1)m.s^{-1}$, c'est-à-dire $K_2 = \frac{(3\sqrt{3})}{\sqrt{\frac{5-4/8}{2}}} = 2\sqrt{3}m$. En exprimant

R et ϕ en fonction de K_1 etK_2 (voir fiche ou, mieux, faites le calcul), on trouve $R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} = \sqrt{4+12} = 4m$ et, comme $R \neq 0$, $\cos\phi = \frac{1}{2}$ et $\sin\phi = -\sqrt{3}/2$, c'est-à-dire $\phi = -\pi/3$. On obtient finalement les deux expressions suivantes:

$$x(t) = 2e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)$$

$$x(t) = 4e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

3. La limite de $x(t)$ quand $t \to +\infty$ est $x_\infty = 0m$, car la limite de $x(t)$ s'identifie avec celle de $e^{-\frac{c}{2M}t} \to 0$ (sans apport d'énergie au cours du temps (second membre), on revient à la position d'équilibre du ressort qui est la position stationnaire, en effet $x = 0(x' = 0, x'' = 0)$ est solution de l'équation différentielle. S'il y avait un apport constant d'énergie, la position stationnaire serait fixée à un $x_\infty > 0$.).

4. Le temps de premier retour à l'origine t_0 est tel que $x(t_0) = 0 = 4e^{-\frac{t_0}{2}}\cos(\frac{3}{2}t_0 - \frac{\pi}{3})$. Comme $4e^{-\frac{t_0}{2}} > 0$, on doit avoir $\cos(\frac{3}{2}t_0 - \frac{\pi}{3}) = 0$, c'est-à-dire $\frac{3}{2}t_0 - \frac{\pi}{3} = \pi/2$, donnant $t_0 = \frac{5\pi}{9}s$.

Pour les exercices complémentaires, la correction a une rédaction très réduite, qui ne reprend pas les données de l'excercice (sauvons des arbres!). En examen, vous devez maintenir une rédaction complète et intelligible.

Exercice 8 –

$$y' - y = \cos(x)$$

On doit résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène. Les solutions homogènes sont $y_h(x) = Ke^x, K \in \mathbb{R}$. On doit trouver maintenant une solution particulière:

- Soit par la méthode de la variation de la constante qui amène à chercher une solution de type $y_p(x) = g(x)e^x$ avec g une primitive de $\cos(x)e^{-x}$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_{x_0}^{x} \cos(x)e^{-x}dx \\
g(x) &= \left[-\cos(x)e^{-x}\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \sin(x)e^{-x}dx \text{ par intégration par parties} \\
g(x) &= \left[-\cos(x)e^{-x}\right]_{x_0}^{x} + \left[\sin(x)e^{-x}\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \cos(x)e^{-x}dx \text{ par intégration par parties} \\
2g(x) &= \left[-\cos(x)e^{-x}\right]_{x_0}^{x} + \left[\sin(x)e^{-x}\right]_{x_0}^{x} \\
g(x) &= (\sin(x) - \cos(x))\, e^{-x} + K', K' \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

  En choisissant $K' = 0$, on obtient: $y_p(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$ et les solutions de l'équation de départ sont: $y(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + Ke^x$.

- On devine une solution particulière. On peut essayer les astuces standardes ($y = constante$? non $y = x^n$? non) et il est judicieux de chercher une solution qui ressemble au second membre, ici $\cos(x)$. On voit que $\cos'(z) - \cos(z) = -\sin(z) - \cos(z) = -(\sin(z) + \cos(z))$. En se rappelant des formules classiques de trigonométrie (ici, $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$ donc

$\cos a + \sin a = \sqrt{2}(\sqrt{2}/2 \cos a + \sqrt{2}/2 \sin a) = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) \cos a + \sin(\frac{\pi}{4}) \sin a) = \sqrt{2}\cos(a - \frac{\pi}{4}))$, on obitent pour $z = x + \frac{\pi}{4} + \pi$, $-(\sin(z) + \cos(z)) = -\sqrt{2}\cos(z + \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x)$. On en conclue que $y_p(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$ est solution particulière et les solutions générales s'écrivent: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ke^x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = Ke^x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4})\cos(x) - \sin(\frac{\pi}{4})\sin(x)) = Ke^x + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$.

Exercice 9 –

1. On résout: $A(h)h' = -k\sqrt{gh}$. On considère une piscine qui a une section circulaire donc $A(h) = \pi r^2$ avec $r = 2m$. Donc on obtient l'équation $4\pi h' = -k\sqrt{gh}$, c'est-à-dire $h'/(2\sqrt{h}) = -\frac{k}{8\pi}\sqrt{g}$. D'après l'exercice 1, 3ème équation, on obtient $h(t) = (-\frac{k}{8\pi}\sqrt{g}t + K)^2, K \in \mathbb{R}$. À $t = 0$, $h(0) = 1 = K^2$, donc $K = 1m^{0.5}$ ($K < 0$ n'est pas possible car la piscine verrait son volume augmentait au cours du temps). Finalement: $h(t) = (1 - \frac{k}{8\pi}\sqrt{g}t)^2$ (qui a bien la dimension d'une longueur).

2. On obtiendra $h(t_f) = 0 = (1 - \frac{k}{8\pi}\sqrt{g}t_f)^2$ pour $t_f = \frac{8\pi}{k\sqrt{g}}$.

Exercice 10 –
$y' + y = e^x$: $y_h = Ke^{-x}$, $y_p = \frac{1}{2}e^x$, $y(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2}e^x$
$y' + 2y = -2x + 3$: $y_h = Ke^{-2x}$, $y_p = -x + 2$, $y(x) = Ke^{-2x} - x + 2$
$y' - 2y = xe^{-x}$: $y_h = Ke^{2x}$, $y_p = g(x)e^{2x}$ (variation de la constante), on cherche $g'(x) = xe^{-3x}$, on choisit $g(x) = -\frac{1}{3}(x + \frac{1}{3})e^{-3x}$, $y(x) = Ke^{2x} - \frac{1}{3}(x + \frac{1}{3})e^{-x}$
$y' + 2y = x^2e^{-2x+2}$: $y_h = Ke^{-2x}$, $y_p = g(x)e^{-2x}$ (variation de la constante), on cherche $g'(x) = x^2e^2$, on choisit $g(x) = \frac{1}{3}x^3e^2$, $y(x) = (K + \frac{1}{3}x^3e^2)e^{-2x}$

Exercice 11 –

1. $y' + y = 5e^{-x}$: $y_h = Ke^{-x}$, $y_p = 5xe^{-x}$ (devine ou variation de la constante), $y(x) = (K + 5x)e^{-x}$.

2. $y(0) = 0 \implies K = 0 \implies y(x) = 5xe^{-x}$

Exercice 12 – Il suffit de comprendre que si on suit la courbe (définie par une fonction f), $y = f(x)$. On cherche alors la fonction $f(x)$ tel que $f(0) = 3$ et $f'(x) = x + f(x)$, c'est-à-dire, on doit résoudre $f' - f = x$, qui donne $f_h = Ke^x$ et $f_p = -(x+1)$ et on obtient $f(x) = Ke^x - (x+1)$, or $f(0) = 3$ et donc $K - 1 = 3$. Finalement: $f(x) = 4e^x - (x + 1)$.

Exercice 13 –
$y'' + y' - 6y = 0$: $\Delta = 25 > 0$: $y(x) = K_1e^{-3x} + K_2e^{2x}$
$y'' + 2y' + y = 0$: $\Delta = 0$: $y(x) = (K_1 + K_2x)e^{-x}$
$y'' - 4y' + 13y = 0$:$\Delta = -36 < 0$: $y(x) = R\cos(3x + \phi)e^{2x}$

Exercice 14 – Sur $]0; +\infty[$, $y' - \frac{y}{x} = x^2$; y_h tel que $y_h'/y_h = \frac{1}{x}$ (bien défini, cf bornes), donc $y_h = Kx$. Pour y_p, $xy_p' - y = x^3$, on devine $y_p = \frac{1}{2}x^3$ ou variation de la constante: $y_p = g(x)x$, donc $g'(x)x = x^2$, on choisit $g(x)\frac{1}{2}x^2$ et on retombe sur le même y_p. Au final $y(x) = (K + \frac{1}{2}x^2)x$.

Exercice 15 –

1. (a) $\Delta = 4\omega^2 < 0$: $y(x) = K_1\cos(\omega x) + K_2\sin(\omega x)$

(b) $y_p(x) = k\sin(\pi x)$ solution si $-k\pi^2\sin(\pi x)+\omega^2 k\sin(\pi x) = -\omega^2\sin(\pi x)$, ce qui donne $k = \frac{\omega^2}{\pi^2-\omega^2}$ (bien défini, cf bornes sur ω). Chercher une solution particulière sous la forme du second membre pour une équation aux coefficients constants est souvent efficace (surtout pour des seconds membres en $\cos, \sin, \exp$,etc.).

(c) $y(x) = K_1\cos(\omega x) + K_2\sin(\omega x) + \frac{\omega^2}{\pi^2-\omega^2}\sin(\pi x)$.

2. (a) Il suffit de déterminer les constantes K_1, K_2: $d(0) = 0 = K_1$donne $K_1 = 0$ et $d(1) = 0 = K_1\cos(\omega) + K_2\sin(\omega) = K_2\sin(\omega)$ donne $K_2 = 0$ car $\sin(\omega) > 0$ sur $]0, \pi[$.
Si on avait choisi la paramétrisation $y(x) = R\cos(\omega x + \phi) + \frac{\omega^2}{\pi^2-\omega^2}\sin(\pi x)$. On aurait le même raisonnement: $d(0) = 0 = R\cos(\phi)$ qui s'annule si $R = 0$ ou $\phi = \pi/2 + m\pi, m \in \mathbb{N}$ et $d(1) = 0 = R\cos(\omega + \phi)$ qui s'annule si $R = 0$ ou $\phi = -\omega + \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{N}$. Comme on voit que $R \neq 0$ amène à plusieurs valeurs pour ϕ car ω ne peut pas être égal à un multiple de π $(0 < \omega < \pi)$, on a donc $R = 0$. Finalement, $d(x) = \frac{\omega^2}{\pi^2-\omega^2}\sin(\pi x)$.

(b) Calculons la dérivée pour trouver le maximum: $d'(x) = \frac{\pi\omega^2}{\pi^2-\omega^2}\cos(\pi x)$ qui s'annule en $d'(\frac{1}{2})$ et $d''(x) = -\frac{\pi^2\omega^2}{\pi^2-\omega^2}\sin(\pi x)$ donne $d''(\frac{1}{2}) < 0$ $(\pi^2 - \omega^2 > 0)$, donc c'est bien un maximum qui atteint $d(\frac{1}{2}) = \frac{\omega^2}{\pi^2-\omega^2}$.