2. Équation Différentielles linéaires

Ordre 1. (i) homogène

$$y' + ay = 0$$

Solutions: $y(x) = K e^{-ax}, \; K \in \mathbb{R}$.

infinies solutions

(ii) non-homogène

$$y' + ay = f$$

Solutions: en trois étapes:

Étape 1 - On garde la solution Ke^{-ax} de la "version homogène" $y' + ay = 0$. Ça va être utile plus tard.

Étape 2 - On trouve une solution particulière y_p de $y' + ay = f$. Il y a deux façons d'en trouver une:

- soit l'on trouve une solution évidente
- soit l'on utilise la "méthode de variation de la constante". Ce sera discuté dans la suite.

Étape 3 - Les solutions sont de la forme

$$y(x) = \underbrace{Ke^{-ax}}_{\text{sol. homog.}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{sol. part.}}, \; K \in \mathbb{R}.$$

2.1 La méthode de variation de la constante

Cette méthode s'applique en deux étapes :

Étape 1 : On ~~définit~~ cherche une solution de la forme $y_p(x) = g(x)e^{-ax}$. ~~Il fau~~ On veut déterminer g.

Étape 2 : Si $y_p(x) = g(x)e^{-ax}$ est une solution particulière de $y' + ay = f$, alors ~~cette fo~~ y_p satisfait

$$y_p'(x) + a y_p(x) = f(x).$$

C'est-à-dire, puisque $y_p'(x) = g'(x)e^{-ax} - a g(x) e^{-ax}$,

$$\underbrace{g'(x)e^{-ax} - \cancel{ag(x)e^{-ax}}}_{y_p'(x)} + \underbrace{\cancel{ag(x)e^{-ax}}}_{a y_p(x)} = f(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = f(x)e^{ax}$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \int f(x)e^{ax}\,dx}$$

Si l'on calcule $\int f(x)e^{ax}dx$, on trouve g telle que $y_p(x) = g(x)e^{-ax}$ est une solution particulière!

Exercices du chapitre II

Exo. 1.

Exo 1.1. $\boxed{y' + 2y = 3.}$

- Non-homogène
- De la forme $y' + ay = f$ avec $a = 2$ et $f(x) = 3$
- Solution homogène Ke^{-2x}, $K \in \mathbb{R}$.

Par la méthode de variation de la constante,

$$y_p(x) = g(x)e^{-2x}$$

est une solution particulière, où

$$g(x) = \int f(x)e^{ax}dx = \int 3e^{2x}dx = \frac{3}{2}e^{2x}.$$

Par conséquent, le solutions de $y' + 2y = 3$ sont

$$y(x) = Ke^{-2x} + \frac{3}{2}e^{2x}e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = Ke^{-2x} + \frac{3}{2}, \; K \in \mathbb{R}.}$$

Exo. 1.2

$$\boxed{y' - y = e^{x}(\cos(x) - x)}$$

- Non-homogène
- De la forme $y' + ay = f$ où $a = -1$ et $f(x) = e^{x}(\cos(x) - x)$
- Sol. hom. Ke^{x}, $K \in \mathbb{N}$.

~~Par la mvc,~~

On calcule

$$g(x) = \int f(x) e^{ax} dx = \int \cancel{e^{x}} (\cos(x) - 1) \cancel{e^{-x}} dx$$

$$= \int (\cos(x) - 1) dx = \sin(x) - x.$$

Par la méthode de var. de la const., la fonction

$$Y_p(x) = g(x) e^{x} = (\sin(x) - x) e^{x}$$

est une solution particulière de $y' - y = e^{x} (\cos(x) - x)$.

Par conséquent, toutes le solutions sont de la forme

$$\boxed{y(x) = K e^{x} + (\sin(x) - x) e^{x}, \quad K \in \mathbb{R}.}$$

Exo. 1.3 $\boxed{y' + 2y = x}$ Devoir

Exo. 1.4 $\boxed{y' + 3y = x \ln(x) e^{-3x}}$

- Non-homogène
- De la forme $y' + ay = f(x)$ avec $a = 3$ et $f(x) = x \ln(x) e^{-3x}$.
- Sol. hom. $K e^{-3x}, K \in \mathbb{R}$.

On calcule

$$g(x) = \int f(x) e^{3x} dx = \int x \ln(x) e^{-3x} e^{3x} dx = \int x \ln(x) dx.$$

En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$\int x\ln(x)\,dx = \int v'(x)u(x)\,dx \quad \text{avec } v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$$
$$u(x) = \ln(x)$$

$$= v(x)u(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}.$$

Par la méthode de variation de la constante, la fonction ~~[illegible]~~ suivante est une solution particulière :

$$y_p(x) = g(x)e^{-3x} = \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)e^{-3x}.$$

Par conséquent, toutes les solutions de $y'+3y = x\ln(x)e^{-3x}$ sont de la forme

$$y(x) = Ke^{-3x} + \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x) = \left[K + \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2}\right]e^{-3x},\ K\in\mathbb{R}}$$

<u>Exo. 2</u> La croissance d'une fonction est représenté par sa dérivée. Si l'on désigne par P la fonction (du temps) population de bactéries, ~~l'én~~ l'énoncé suppose qu'il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que

$$\underbrace{P'(t)}_{\text{croissance}} = \underbrace{b\,P(t)}_{\text{proportionelle à la population.}}, \quad \forall t \geq 0.$$

On a donc une éq. diff. de la forme $y' + ay = 0$ où $y = P$. ~~La~~ et $a = -b$. Les solutions ~~est~~ sont de la forme

$$P(t) = k e^{bt}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par hypothèse,

$$P(1) = 8P(0)$$

$$\Rightarrow \cancel{k} e^{b \cdot 1} = 8 \cancel{k} e^{b \cdot 0}$$

$$\Rightarrow e^{b} = 8 \Rightarrow b = \ln(8).$$

<u>Question 1</u>. Dans quel instant t_1 on a eu

$$P(t_1) = 4P(0) \quad ?$$

~~Q~~a Réponse : On trouve

$$P(t_1) = 4P(0)$$

$$K e^{\ln(8)\,t_1} = 4K e^{\ln(8)\cdot 0}$$

$$\cancel{K} e^{\ln(8)t_1} = 4\cancel{K}\cdot 1$$

$$e^{\ln(8)\,t_1} = 4$$

$$\ln(8)\,t_1 = \ln(4)$$

$$t_1 = \frac{\ln(4)}{\ln(8)} = \frac{\ln(2^2)}{\ln(2^3)} = \frac{2\ln(2)}{3\ln(2)}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{2}{3} \text{ hours.}$$

$$\Rightarrow t_1 = 40 \text{ minutes.}$$

Question 2 : Dans quel instant t_2 on aura

$$P(t_2) = 1000\,P(0) \quad ?$$

Réponse : Similairement,

$$P(t_2) = 1000\,P(0) \Rightarrow \cancel{K} e^{\ln(8)t_2} = 1000\cancel{K}$$

$$\Rightarrow \ln(8)\,t_2 = \ln(1000) \Rightarrow t_2 = \frac{\ln(10^3)}{\ln(2^3)}$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{3\ln(10)}{3\ln(2)} \Rightarrow t_2 = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3{,}32\,h.$$

$$\simeq 3h\,19\,min.$$

Exo. 3 $y' + y = a e^{-t}, t \geq 0, a \in \mathbb{R}$.

Exo. 3(a) f est une solution de $y' + y = a e^{-t}$ satisfaisant $f(0) = 0$ (taux initiale $= 0$).

$\boxed{y' + y = a e^{-t}}$ $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ Non-homogène} \\ \bullet \text{ De la forme } y' + Ay = h(t) \text{ où} \\ A = 1 \text{ et } h(t) = a e^{-t}. \\ \bullet \text{ Sol. hom. } K e^{-t}, K \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$

On calcule

$$g(x) = \int h(t) e^{At} dt$$
$$= \int a e^{-t} e^{t} dt = \int a = at.$$

Par la méthode de var. de la const., la fonction

$$y_p(t) = g(t) e^{-t} = a t e^{-t}$$

est une solution particulière de $y' + y = a e^{-t}$.
Les solutions de cette equation sont donnés par

$$y(t) = K e^{-t} + a t e^{-t}.$$

Finalement, f est la solution qui satisfait $f(0) = 0$, càd,

$$y(0) = 0 \Rightarrow K e^{-0} + a \cdot 0 \cdot e^{-0} = K = 0.$$

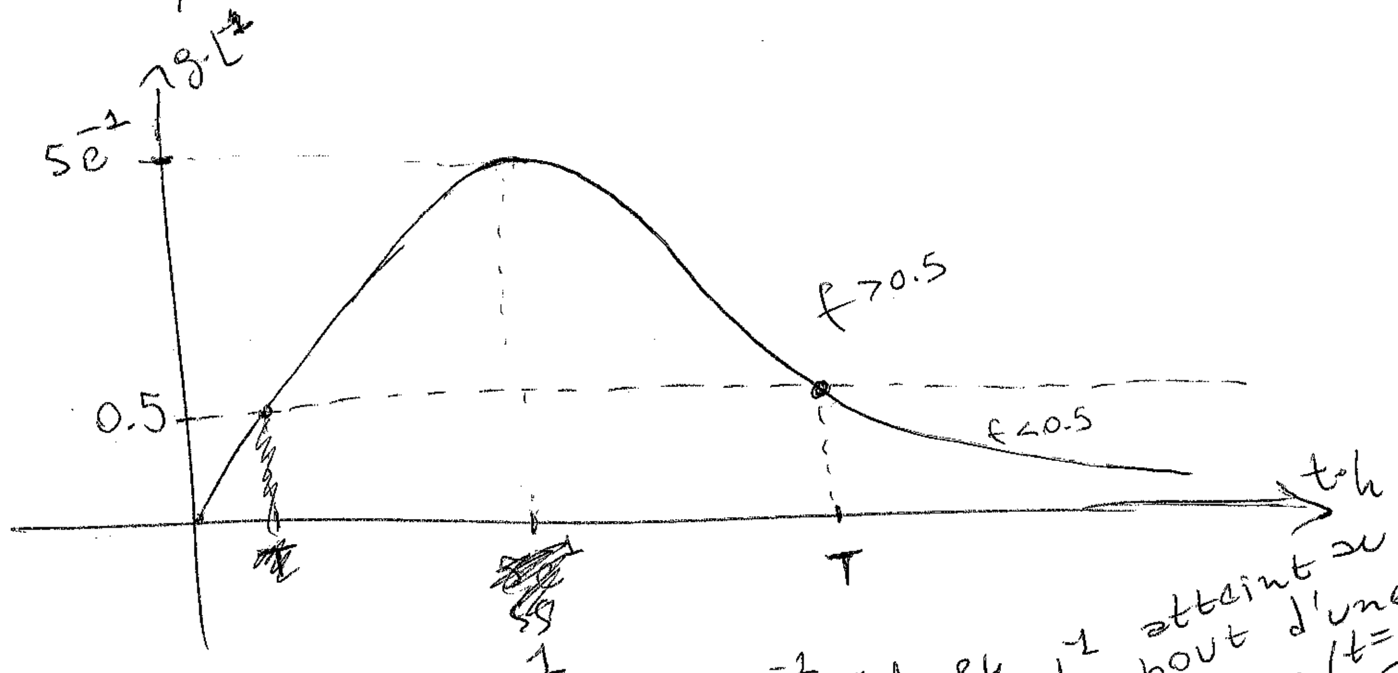
Par conséquent,

$$f(t) = a t e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

<u>Exo. 3(b)</u> Fixe $a = 5$. Alors

$$f(t) = 5 t e^{-t}.$$
$$f'(t) = 5 e^{-t} - 5 t e^{-t} = 5(1-t) e^{-t}.$$
$$f'(0) = 0 \iff t = 1.$$

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(1) = 5e^{-1}$	$\searrow$	0



Taux d'alcoolémie maximale $5e^{-1} \approx 1.84 \, g \cdot L^{-1}$, atteint au bout d'une heure ($t=1$).

Exo. 3(b) $f(\cancel{T}) = 0.5 \Rightarrow 5Te^{-T} = 0.5$.

Pour $T = 3$ on trouve $f(3) = 0.75 > 0.5$.

Pour $T = 4$ on trouve $f(4) = 0.37 < 0.5$.

Alors, au bout de ~~3~~ 4 heures, le taux est inférieur à $0.5 g.L^{-1}$.

~~Exo. 4~~ Ordre 2 :

- Toujours homogènes dans ce cours (sauf Exo. 15) ;
- On calcule Δ comme que pour une équation ~~d~~ polynomiale de degré 2 (eq. caractéristique)
- En dépendant des cas $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$, la solution aura les formes définies selon le tableau 2 dans la fiche de synthèse.

Définition : Soit $ay'' + by' + cy = 0$ une équa. diff. L'équation $aX^2 + bX + c = 0$ est appelée équation caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$.

Tableau de cas, $ay''+by'+cy=0$, $\Delta = b^2-4ac$

$\Delta > 0$	On note λ_1, λ_2 les racines réelles de l'éq. caractéristique. Les solutions sont $y(x) = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	On note λ l'unique solution réelle de l'éq. car. Les solutions sont $y(x) = (K_1 + K_2 x) e^{\lambda x}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	On note $u \pm iv$ les deux solutions complexes de l'éq. car. (On a $u = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}$ et $v = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}$) Les solutions sont $y(x) = (K_1 \cos(vx) + K_2 \sin(vx)) e^{ux}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Ou, de façon équivalente, $y(x) = R\cos(vx+\varphi) e^{ux}$, $R \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

Exo 4.

Exo. 4.1 $y''-3y'+2y=0 \Rightarrow \Delta = 9-4\cdot1\cdot2 = 1>0.$

$$\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3\pm1}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Les sol. sont

$$y(x) = K_1 e^{2x} + K_2 e^{x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Exo. 4.2 $y''-4y'+4y=0 \Rightarrow \Delta = 0$

$$\lambda = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2.$$

Les sol. sont

$$y(x) = (K_1 + K_2 x)\, e^{2x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Exo. 4.3 $y''-4y'+8y=0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4\cdot1\cdot8 = -16<0.$

$$u = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2, \quad v = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2.$$

Les solutions sont

$$y(x) = (K_1 \cos(2x) + K_2 \sin(2x))\, e^{2x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Exo. 4.4 $\boxed{\text{Devoir}}$

Exo. 5 $\quad \theta'(t) = \lambda(\theta_a - \theta(t))$,

θ : fonction température

θ_a : constante, temp. ambiante

λ : constante expérimentale $(\lambda > 0)$

t : variable temps de θ en min.

Exo. 5.1

$$\rightsquigarrow \boxed{\theta' + \lambda\theta = \lambda\theta_a}$$

- Non-homogène
- De la forme $\theta' + a\theta = f(t)$ avec $a = \lambda$ et $f(t) = \lambda\theta_a$
- Sol. homogène $Ke^{-\lambda t}$, $K \in \mathbb{R}$.

~~Exo. 5.1~~ On calcule

$$g(t) = \int f(t) e^{\lambda t} dt = \int \lambda \theta_a e^{\lambda t} dt = \lambda\theta_a \int e^{\lambda t} dt$$

$$= \cancel{\lambda}\theta_a \frac{e^{\lambda t}}{\cancel{\lambda}} = \theta_a e^{\lambda t}$$

Par la méthode de var. de la const., une solution particulière est donnée par

$$\theta_p(t) = g(t) e^{-\lambda t} = \theta_a e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \theta_a.$$

Alors, les solutions sont

$$\boxed{\theta(t) = Ke^{-\lambda t} + \theta_a, \ K \in \mathbb{R}.}$$

Exo. 5.2

Données : $\theta_a = 31$

$\theta(0) = 10$

$\theta(10) = 17$

Question : Pour quel t on aura $\theta(t) = 25$?

On a

$$\theta(0) = 10 \Rightarrow K e^{-\lambda \cdot 0} + \theta_a = 10$$

$$\Rightarrow K + 31 = 10$$

$$\Rightarrow K = -21$$

$$\theta(10) = 17 \Rightarrow K e^{-\lambda \cdot 10} + \theta_a = 17$$

$$\Rightarrow -21 \cdot e^{-10\lambda} + 31 = 17$$

$$\Rightarrow -21 e^{-10\lambda} = -14$$

$$\Rightarrow e^{-10\lambda} = \frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -10\lambda = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{10} \approx 0.04$$

Alors, on connaît θ précisément :

$$\theta(t) = -21 e^{-0.04t} + 31.$$

On cherche t ~~tq~~ tel que

$$\theta(t) = 25.$$

On calcule

$$\theta(t) = 25$$

$$\Rightarrow -21e^{-0.04t} + 31 = 25$$

$$\Rightarrow -21e^{-0.04t} = -6$$

$$\Rightarrow e^{-0.04t} = \frac{6}{21} = \frac{2\cdot 3}{7\cdot 3} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow -0.04t = \ln(2/7)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(2/7)}{-0.04} \approx 31.32$$

$$\approx 31\text{ m } 20\text{sec}.$$