Fiche du chapitre II - Vecteurs et géométrie vectorielle

A-Vecteurs du plan

Coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

✓ Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, ses **coordonnées** dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$;

✓ Si A est un point du plan, ses **coordonnées** (x_A, y_A) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On utilise dans la suite la notation $A(x_A, y_A)$.

✓ Si A a pour coordonnées (x_A, y_A) et B a pour coordonnées (x_B, y_B) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Vecteurs colinéaires

✓ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$).

✓ Deux vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$ sont colinéaires si et seulement si

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

✓ Trois points A, B, C du plan sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (donc si et seulement si $(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) = 0$).

Produit scalaire dans le plan

✓ Le **produit scalaire** de $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$ est le réel

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

✓ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

✓ La **norme** du vecteur $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ est le réel positif

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

✓ Si θ désigne l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, on a $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$.

✓ La **distance** entre deux points A (de coordonnées (x_A, y_A)) et B (de coordonnées (x_B, y_B)) est égale à $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

✓ Deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ forment une **base orthonormée** du plan si $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 1$ et $\langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle = 0$.

✓ Lorsque $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base orthonormée du plan, on a pour tout vecteur $\vec{u}$ la relation

$$\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1} + \langle \vec{u}, \vec{e_2} \rangle \vec{e_2}.$$

Droites du plan

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Un **vecteur directeur** de $\mathcal{D}$ est un vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de $\mathcal{D}$. Un **vecteur normal** à $\mathcal{D}$ est un vecteur orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

✓ Une **équation cartésienne** de $\mathcal{D}$ est une relation du type $ax+by+c=0$ satisfaite par un point M de coordonnées (x,y) si et seulement si $M \in \mathcal{D}$.
Avec les notations précédentes,

- $\overrightarrow{u} = -b\overrightarrow{\imath} + a\overrightarrow{\jmath}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$;
- $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$;
- si $b \neq 0$, l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ peut s'écrire $y = px + y_0$, où $p = -\dfrac{a}{b}$ est appelé la **pente** (ou le **coefficient directeur**) de $\mathcal{D}$, et $y_0 = -\dfrac{c}{b}$ est appelé l'**ordonnée à l'origine**.

✓ Une **équation paramétrique** de $\mathcal{D}$ est une relation du type $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + t\alpha \\ y & = & y_A + t\beta \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, satisfaite par un point M de coordonnées (x,y) si et seulement si $M \in \mathcal{D}$.
Avec les notations précédentes,

- $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$;
- $\overrightarrow{v} = -\beta\overrightarrow{\imath} + \alpha\overrightarrow{\jmath}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$;
- $A(x_A, y_A)$ est un point de la droite $\mathcal{D}$.

✓ Equations de la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath}$
cartésienne : $\beta(x-x_A) - \alpha(y-y_A) = 0$ (ou $y = \dfrac{\beta}{\alpha}(x-x_A) + y_A$ si $\alpha \neq 0$).
paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + t\alpha \\ y & = & y_A + t\beta \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$.

✓ Equations de la droite passant par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$:
cartésienne : $(y_B - y_A)(x-x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0$ (ou $y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$ si $x_B \neq x_A$).
paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + t(x_B - x_A) \\ y & = & y_A + t(y_B - y_A) \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$.

✓ Equations de la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$
cartésienne : $a(x-x_A) + b(y-y_A) = 0$ (ou $y = -\dfrac{a}{b}(x-x_A) + y_A$ si $b \neq 0$).
paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A - tb \\ y & = & y_A + ta \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Projection orthogonale et distance

Soit $\mathcal{D}$ une droite. On note A un de ses points, $\overrightarrow{d}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Soit M un point du plan.

✓ Le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{D}$ est le point H défini par $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{d} \rangle}{\| \overrightarrow{d} \|^2}\overrightarrow{d}$.

✓ La distance de M à $\mathcal{D}$ est égale à $\delta = \|\overrightarrow{MH}\| = \dfrac{|\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \sqrt{\|\overrightarrow{AM}\|^2 - \dfrac{\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{d} \rangle^2}{\|\overrightarrow{d}\|^2}}$. Si $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ et si M a pour coordonnées (x_M, y_M), on a $\delta = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

✓ Soit A, B, C trois points du plan. L'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CH}\|$, où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Avec les coordonnées des points, cette aire est égale à

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\Big|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\Big|.$$

B-Vecteurs de l'espace

Coordonnées

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

- ✓ Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de l'espace, ses **coordonnées** dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ sont les réels x, y et z tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$;
- ✓ Si A est un point de l'espace, ses **coordonnées** dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$;
- ✓ Si A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et B a pour coordonnées (x_B, y_B, z_B) dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Produit scalaire dans l'espace

- ✓ Le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{\imath} + y_1\overrightarrow{\jmath} + z_1\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x_2\overrightarrow{\imath} + y_2\overrightarrow{\jmath} + z_2\overrightarrow{k}$ est le réel
$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$
- ✓ Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.
- ✓ La **norme** du vecteur $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{\imath} + y_1\overrightarrow{\jmath} + z_1\overrightarrow{k}$ est le réel positif $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.
- ✓ La **distance** entre deux points A (de coordonnées (x_A, y_A, z_A)) et B (de coordonnées (x_B, y_B, z_B)) est égale à $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- ✓ Trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ forment une **base orthonormée** de l'espace si $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = \|\overrightarrow{e_3}\| = 1$ et $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} \rangle = \langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle = 0$;
- ✓ Lorsque $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormée de l'espace, on a pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ la relation
$$\overrightarrow{u} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_1} \rangle \overrightarrow{e_1} + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_2} \rangle \overrightarrow{e_2} + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_3} \rangle \overrightarrow{e_3}.$$

Produit vectoriel dans l'espace

- ✓ Le **produit vectoriel** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2)) est le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ qui a pour coordonnées
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$$
(⚠ **Attention** ! $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$).
- ✓ Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs et λ un nombre réel, on a $(\lambda\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$.
- ✓ Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- ✓ Le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à la fois aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. De plus, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux et de norme 1, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ forme une base orthonormée de l'espace.
- ✓ Trois points A, B, C de l'espace sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- ✓ Quatre points A, B, C, D de l'espace sont coplanaires (c'est-à-dire appartiennent à un même plan) si et seulement si on a $\left\langle \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = 0$.

Plans de l'espace

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Une **base vectorielle** de $\mathcal{P}$ est un couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, où A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$. Un **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs d'une base vectorielle de $\mathcal{P}$.

- ✓ Une **équation cartésienne** de $\mathcal{P}$ est une relation du type $ax + by + cz + d = 0$ satisfaite par un point M de coordonnées (x, y, z) si et seulement si $M \in \mathcal{P}$. Le vecteur $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
- ✓ Une **équation paramétrique** de $\mathcal{P}$ est une relation du type $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_A + \alpha_1 t + \alpha_2 s \\ y &=& y_A + \beta_1 t + \beta_2 s \\ z &=& z_A + \gamma_1 t + \gamma_2 s \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$, satisfaite par un point M de coordonnées (x, y, z) si et seulement si $M \in \mathcal{P}$. Les vecteurs

$\overrightarrow{u} = \alpha_1 \overrightarrow{\imath} + \beta_1 \overrightarrow{\jmath} + \gamma_1 \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = \alpha_2 \overrightarrow{\imath} + \beta_2 \overrightarrow{\jmath} + \gamma_2 \overrightarrow{k}$ forment une base vectorielle de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point du plan $\mathcal{P}$.

- ✓ Equations du plan passant par les trois points supposés non alignés $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$:
  cartésienne : $\left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0$. Autrement dit, si $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (a, b, c), le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.
  paramétrique : $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + (x_B - x_A)t + (x_C - x_A)s \\ y & = & y_A + (y_B - y_A)t + (y_C - y_A)s \\ z & = & z_A + (z_B - z_A)t + (z_C - z_A)s \end{array} \right.$, avec $t, s \in \mathbb{R}$.
- ✓ Equations du plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de base vectorielle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{u} = \alpha_1 \overrightarrow{\imath} + \beta_1 \overrightarrow{\jmath} + \gamma_1 \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = \alpha_2 \overrightarrow{\imath} + \beta_2 \overrightarrow{\jmath} + \gamma_2 \overrightarrow{k}$:
  cartésienne : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, où (a, b, c) sont les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
  paramétrique : $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + \alpha_1 t + \alpha_2 s \\ y & = & y_A + \beta_1 t + \beta_2 s \\ z & = & z_A + \gamma_1 t + \gamma_2 s \end{array} \right.$, avec $t, s \in \mathbb{R}$.
- ✓ Equations du plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = a \overrightarrow{\imath} + b \overrightarrow{\jmath} + c \overrightarrow{k}$:
  cartésienne : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.
  paramétrique : $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + \alpha_1 t + \alpha_2 s \\ y & = & y_A + \beta_1 t + \beta_2 s \\ z & = & z_A + \gamma_1 t + \gamma_2 s \end{array} \right.$, avec $t, s \in \mathbb{R}$, où $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ sont les coordonnées de n'importe quel vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul orthogonal à $\overrightarrow{n}$, et où $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u}$.

Droites de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace.

- ✓ Un **système d'équations cartésiennes** de $\mathcal{D}$ est un système du type $\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 & = & 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 & = & 0 \end{array} \right.$ satisfait par un point M de coordonnées (x, y, z) si et seulement si $M \in \mathcal{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- ✓ Une **équation paramétrique** de $\mathcal{D}$ est une relation du type $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + t\alpha \\ y & = & y_A + t\beta \\ z & = & z_A + t\gamma \end{array} \right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, satisfaite par un point M de coordonnées (x, y, z) si et seulement si $M \in \mathcal{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{\imath} + \beta \overrightarrow{\jmath} + \gamma \overrightarrow{k}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, et $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point de la droite $\mathcal{D}$.

Projection orthogonale et distance

- ✓ Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. On note A un de ses points et $\overrightarrow{d}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Soit M un point de l'espace. Le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{D}$ est le point H défini par $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{d} \rangle}{\| \overrightarrow{d} \|^2} \overrightarrow{d}$.
  La distance de M à $\mathcal{D}$ est égale à $\delta = \|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{AM}\|^2 - \dfrac{\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{d} \rangle^2}{\| \overrightarrow{d} \|^2}}$.
- ✓ Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On note A un de ses points et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Soit M un point de l'espace. Le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{P}$ est le point H défini par $\overrightarrow{MH} = \dfrac{\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{n} \rangle}{\| \overrightarrow{n} \|^2} \overrightarrow{n}$.
  La distance de M à $\mathcal{P}$ est égale à $\delta = \|\overrightarrow{MH}\| = \dfrac{\left| \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{n} \rangle \right|}{\| \overrightarrow{n} \|}$. Si $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et si M a pour coordonnées (x_M, y_M, z_M), on a $\delta = \dfrac{|a x_M + b y_M + c z_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.