Lista de exercício: Produto interno e norma

Exercício 1. Decida quais das funções abaixo são produtos internos em $\mathbb{R}^2$. Em caso afirmativo, verifique as propriedades que definem produto interno. Em caso negativo, justifique dizendo quais propriedades falham.

a) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$

b) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 - y_1y_2$

c) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$

d) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 3x_1x_2 + 15y_1y_2$

e) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 2(x_1x_2 + y_1y_2)$

f) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + 1$

g) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 - x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$

h) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = (x_1 + y_1)y_2$

Exercício 2. Seja $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 2 por 2. Verifique que a aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + 4a_{22}b_{22},$$

é um produto interno em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine a norma $\|\cdot\|$ associada a este produto interno. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule:

a) $\|A\|$

b) $\|B\|$

c) $\|A + B\|$

d) $\|A - B\|$

e) $\langle A, B\rangle$

f) $\langle A + B, A - B\rangle$

Exercício 2. Seja $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínuas. Defina em $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ a aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ pela fórmula

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Verifique que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Determine a norma $\|\cdot\|$ associada a este produto interno. Considere $f(x) = 1 + x$ e $g(x) = x^2$. Calcule:

a) $\|f\|$

b) $\|g\|$

c) $\|f + g\|$

d) $\|f - g\|$

e) $\langle f, g\rangle$

f) $\langle f + g, f - g\rangle$

Exercício 3. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções polinomiais reais de grau menor ou igual à 2. Defina a aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ pela expressão

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Verifique que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine a norma $\|\cdot\|$ associada a este produto interno. Considere $p(x) = 1 + x$ e $q(x) = x^2$. Calcule:

a) $\|p\|$

b) $\|q\|$

c) $\|p + q\|$

d) $\|p - q\|$

e) $\langle p, q\rangle$

f) $\langle p + q, p - q\rangle$