Máximos e Mínimos 2

Exercícios

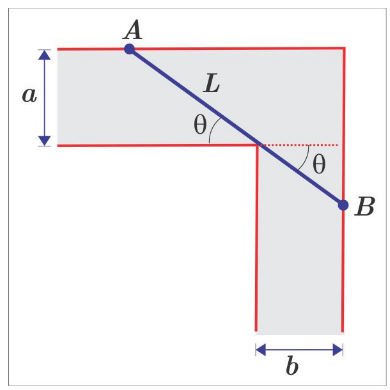
1. Determine dois números positivos x e y com produto p e cuja soma seja a menor possível.

2. Determine as dimensões de uma caixa retangular de base quadrada, sem tampa, de forma que sua área total tenha um valor prefixado A e seu volume V seja o maior possível.

3. Demonstre que o retângulo de área máxima inscrito em um círculo de raio r é um quadrado.

4. De todos os triângulos isósceles de igual perímetro, o que tem maior área é o triângulo eqüilátero.

5. A figura ilustra dois corredores, de larguras $a = \sqrt{2}$ metros e $b = 4$ metros, que se encontram num ângulo reto. Calcule, em metros, o comprimento $L = \mathrm{dist}(A; B)$ da menor viga que passa horizontalmente de um corredor ao outro. Comece expressando L em função do ângulo θ.



6. Encontre sobre a curva $y^2 - x^2 = 1$, o ponto mais próximo do ponto $A(-1, 0)$.

7. Qual o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado resulta no maior valor possível?

8. Qual ponto da parábola $y = 1 - x^2$ está mais próximo da origem? (*sug.*: esse problema consiste em minimizar a função $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + \left(1 - x^2\right)^2$, que representa o quadrado da distância de um ponto da parábola à origem).

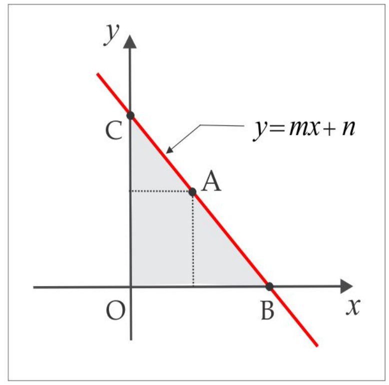
9. Qual ponto da parábola $y = x^2$ está mais próximo da reta $y = x - 2$? (*sug.*: minimize o quadrado da distância de um ponto a uma reta!).

10. Dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro p, mostre que o quadrado é o de maior área.

11. A figura ao lado ilustra a reta de equação $y = mx + n$, $m < 0$, passando no ponto $A(3, 2)$ do primeiro quadrante.

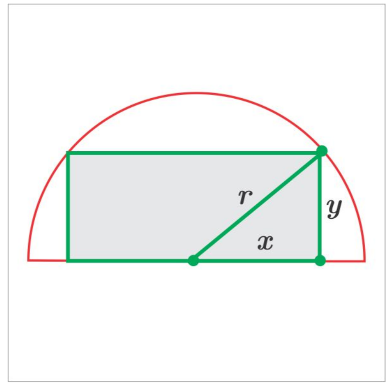
(a) Expresse a área do triângulo OBC em função de n.

(b) Determine m e n, de modo que a área do triângulo OBC seja a menor possível.

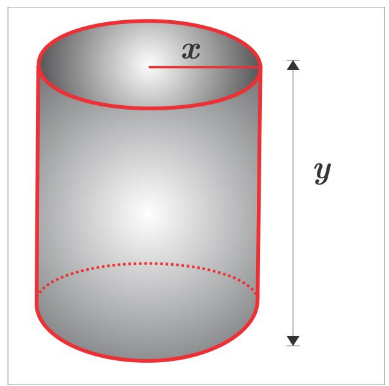


12. Encontre os comprimentos dos lados do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r, estando a base do retângulo sobre o diâmetro do semicírculo. (*sug.*: a função a ser maximizada é a área e esta vem dada por:

$$A = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}.$$



13. Uma indústria de embalagens de metal onde você trabalha é escolhida para fornecer latinhas de cerveja de $500ml$ para um fabricante multinacional. O gerente da fábrica descobre que você é um funcionário que já estudou cálculo e, por essa razão, lhe procura e pergunta: as dimensões da lata (*altura* e *raio*) podem influir no custo da produção? Recorde-se que a área total A_T e o volume V do cilindro de raio x e altura y são dados por: $A_T = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ e $V = \pi x^2 y = 500$.

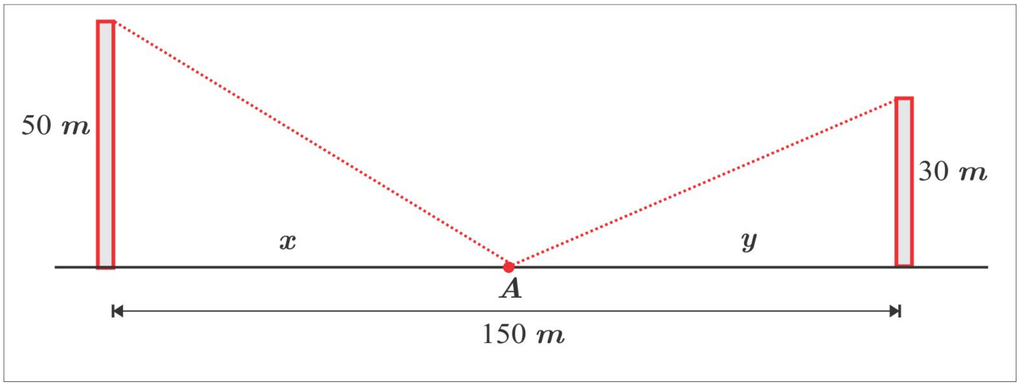


14. Uma indústria produz determinado artigo e vende-o com um lucro mensal dado pela expressão $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, onde q representa a quantidade produzida mensalmente. Qual a produção que maximiza o lucro? Qual é esse lucro máximo?

15. A figura ilustra duas torres de altura, respectivamente, 50 e 30 metros, separadas por uma distância de 150 metros e um cabo guia deve ser estendido do ponto A até o topo de cada torre.

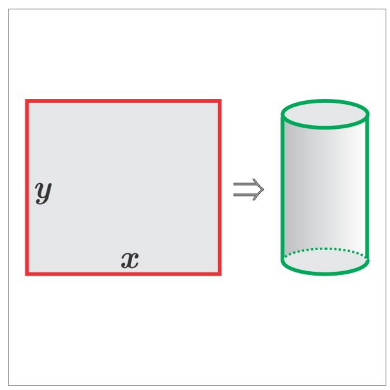
(a) Localize exatamente o ponto A de modo que o comprimento total do cabo seja mínimo.

(b) Mostre que o comprimento do cabo usado é mínimo sempre que os ângulos em A são iguais, independente da altura das torres.



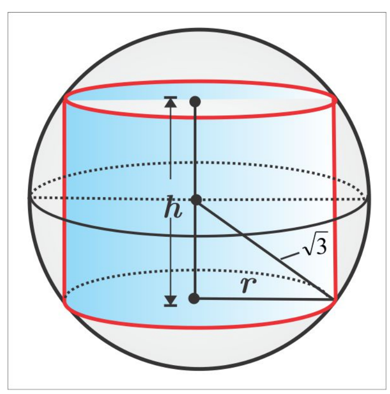
16. Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com $800m$ de fio à disposição, qual é a maior área que se pode cercar e quais são suas dimensões?

17. Uma folha com perímetro de $36m$ será enrolada para formar um cilindro, como é mostrado na figura ao lado. Que valores de x e y fornecem o maior volume?
A mesma folha sofrerá uma revolução em torno de seu lado y gerando um outro cilindro. Que valores de x e y fornecem, agora, o maior volume?



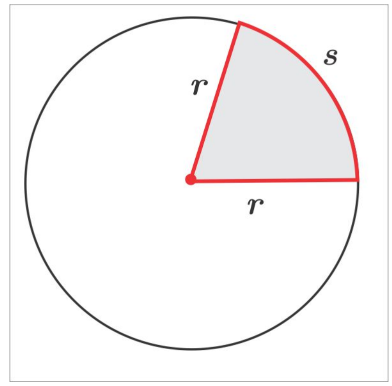
18. Determine o raio r e a altura h do maior cilindro circular reto que pode ser colocado dentro de uma esfera de raio $\sqrt{3}$, como sugere a figura ao lado. Recorde-se que o volume da esfera e do cilindro são dados, respectimaente por:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_C = \pi r^2 h.$$



19. Se o perímetro do setor circular apresentado na figura ao lado for fixado em $100m$, que valores de r e s darão ao setor a maior área? O perímetro e a área do setor são dados, respectivamente, por:

$$100 = 2r + s \ \text{ e } \ A = \frac{rs}{2}$$



20. A figura ilustra um canal, cuja seção transversal tem o formato de um trapézio. A base e as paredes do canal têm largura $a = 80\ cm$ e o ângulo θ, de inclinação das paredes, que produz a maior vazão é o mesmo que produz a maior área da seção transversal.