# Lista de exercícios 2
# Números reais, supremo e ínfimo

*(Os exercícios marcados com * são os mais pertinentes).*

**Exercício 1*** Prove que $\frac{(1-x^{n+1})}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n$ para todo $x \neq 1$.

**Exercício 2*** Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

**Exercício 3*** Prove que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

**Exercício 4** Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x^2 + y^2 = 0$, prove que $x = y = 0$.

**Exercício 5*** Prove por indução que $(1 + x)^n \geq 1 + nx + [n(n-1)/2]x^2$ se $x \geq 0$.

**Exercício 6*** Para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, prove que $(1 + x)^{2n} \geq 1 + 2nx$.

**Exercício 7*** Prove que $|a - b| < \varepsilon \implies |a| < |b| + \varepsilon$.

**Exercício 8** Use o fato de que o trinômio do segundo grau $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + \lambda y_i)^2$ é $\geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Prove ainda que vale a igualdade se, e somente se, exite $\lambda$ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, ou então $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$.

**Exercício 9** Se $a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n$ pertencem ao intervalo $(\alpha, \beta)$ e $b_1, \ldots, b_n$ são positivos, prove que $(a_1+\cdots+a_n)/(b_1+\cdots b_n)$ pertence a $(\alpha, \beta)$. Nas mesmas condições, se $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$, prove que $(t_1a_1 + \cdots + t_na_n)/(t_1b_1 + \cdots t_nb_n)$ também pertence ao intervalo $(\alpha, \beta)$.

**Exercício 10*** Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *limitada superiormente* quando sua imagem $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ é um conjunto limitado superiormente. Então põe-se $\sup f = \sup\{f(x) : x \in X\}$. Prove que, se $f, g : X \to \mathbb{R}$ tão limitadas superiormente, o mesmo ocorre com a soma $f + g : X \to \mathbb{R}$ e tem-se $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Dê um exemplo com $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$. Enuncie e prove um resultado análogo para inf.

**Exercício 11*** Dadas as funções $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ limitadas superiormente, prove que o produto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}^+$ é uma função limitada (superior e inferiormente) com $\sup(f \cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf f \cdot \inf g$. Dê exemplos onde se tenha $<$ e não $=$.

**Exercício 12*** Nas condições do exercício anterior, mostre que $\sup(f^2) = (\sup f)^2$ e $\inf(f^2) = (\inf f)^2$.

**Exercício 13** Prove que o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável. Um número real chama-se *algébrico* quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Prove que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Um n´mero real chama-se *transcendente* quando não é algébrico. Prove que existem números transcendentes.

**Exercício 14** Prove que um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, satisfaz a implicação

$$a < x < b,\ a, b \in I \implies x \in I.$$