Lista de exercícios 4
Séries de números reais

(Os exercícios marcados com (*) são os mais pertinentes).

Exercício 1 (*)**.** Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, com $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ e $b_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, mostre que $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Calcule explicitamente as n-ésimas reduzidas s_n e t_n destas séries e mostre que $\lim s_n = \lim t_n = +\infty$. Conclua que as séries dadas são divergentes.

Exercício 2 (*)**.** Note que $\sum \frac{2}{n(n+1)}$ é uma série telescópica convergente. Em seguida, use o critério de comparação para provar que $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente a partir da convergência de $\sum \frac{2}{n(n+1)}$.

Exercício 3 (*)**.** Seja s_n a n-ésima reduzida da série harmônica. Prove que, para $n = 2^m$, tem-se $s_n > 1 + \frac{m}{2}$. Conclua que a série harmônica diverge.

Exercício 4 (*)**.** Mostre que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge.
(Dica: agrupe os termos um a um, dois a dois, quatro a quatro, oito a oito, etc. e compare com a série harmônica).

Exercício 5. Mostre que, se $r > 1$, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge.

Exercício 6 (*)**.** Prove que a série $\sum \frac{\log n}{n^2}$ converge.
(Dica: use que $\log x \leq \sqrt{x}$ para $x \geq 0$).

Exercício 7. Prove que, se $\sum a_n$ converge e $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$, então $\lim n a_n = 0$.

Exercício 8 (*)**.** Se $\sum a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$ e

$$\sum a_n \operatorname{sen}(nx) \quad \text{e} \quad \sum a_n \cos(nx)$$

são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 9 (*)**.** A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \cdots$ tem termo alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende para zero. Entretanto, é divergente. Porque isso não contradiz o critério de Leibniz?

Exercício 10 (*)**.** Dê exemplo de uma série convergente $\sum a_n$ e de uma sequência limitada (x_n) tais que a série $\sum a_n x_n$ seja divergente. Examine o que ocorre se uma das hipóteses seguintes for verificada: (a) (x_n) é convergente; (b) $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Exercício 11. Prove que é convergente a série obtida alternando-se os sinais dos termos da série harmônica, de modo que fique p termos positivos ($p \in \mathbb{N}$ fixado) seguidos de p termos negativos, alternadamente.

Exercício 12. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente e $\lim b_n = 0$, ponha

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

e prove que $\lim c_n = 0$.

Exercício 13 (*)**.** Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum a_n^2$ converge.
(Dica: use o critério de comparação com $n >> 0$).

Exercício 14 (*)**.** Se $\sum_n a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergem, prove que $\sum a_n b_n$ converge absolutamente. *(Dica: note que $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ e use o critério de comparação).*

Exercício 15. Prove: uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, é limitado conjunto de todas as somas finitas formadas com os termos de a_n.

Exercício 16 (*)**.** Prove que, se existir uma infinidade de índices n tais que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, então a série $\sum a_n$ diverge. Se $a_n \neq 0$ para todo n e $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ para todo suficientemente grande, então $\sum a_n$ diverge. Por outro lado, a série $1/2+1/2+1/2^2+1/2^2+1/2^3+1/2^3+\cdots$ converge mas tem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ para todo n ímpar.

Exercício 17 (*)**.** Se $0 < a < b < 1$, a série $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$ é convergente. Mostre que o teste de Cauchy conduz a este resultado, mas o teste de d'Alembert é inconclusivo.

Exercício 18 (*)**.** Determine se a série $\sum \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ é convergente usando ambos os testes de d'Alembert e de Cauchy.

Exercício 19 (*)**.** Dada uma sequência de números positivos (x_n) com $\lim x_n = a$, prove que $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$.
(Dica: aplique um dos teoremas vistos em aula).

Exercício 20 (*)**.** Determine para quais valores de x cada uma das séries abaixo é convergente:

$$\sum n^k x^n, \quad \sum n^n x^n, \quad \sum \frac{x^n}{n^n}, \quad \sum n! x^n, \quad \sum \frac{x^n}{n^2}.$$