Lista de exercícios 5
Topologia da reta

(Os exercícios marcados com (*) são os mais pertinentes).

Exercício 1 (*). Prove que que vale $\operatorname{int}(\operatorname{int} X) = \operatorname{int} X$ para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Conclua que $\operatorname{int} X$ é um conjunto aberto.

Exercício 2 (*). Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade: "toda sequência (x_n) que converge para um ponto $a \in A$ tem seus termos x_n pertencentes a A para todo n suficientemente grande". Prove que A é aberto.

Exercício 3 (*). Prove que, para quaisquer $A, B \subset \mathbb{R}$, temos $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$ e $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$. Verifique que $\operatorname{int}(A \cup B) \neq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$ quando $A = (0, 1]$ e $B = [1, 2)$.

Exercício 4. Para todo $X \in \mathbb{R}$, prove que vale a união disjunta $\mathbb{R} = \operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}\backslash X) \cup F$, onde F é formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R}\backslash X$. O conjunto $F = \operatorname{fr} X$ chama-se a *fronteira* de X. Prove que A é aberto se, e somente se, $A \cap \operatorname{fr} A = \varnothing$.

Exercício 5. Determine a fronteira de cada um dos seguintes conjuntos: $X = [0, 1]$, $Y = (0, 1) \cup (1, 2)$, $Z = \mathbb{Q}$, $W = \mathbb{Z}$.

Exercício 6. Sejam $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ uma cadeia decrescente de intervalos limitados, dois a dois disjuntos, cuja interseção não é vazia. Prove que I é um intervalo, o qual nunca é aberto.

Exercício 7. Sejam I um intervalo fechado não-degenerado e $k > 1$ um número natural. Prove que o conjunto dos números racionais $\frac{m}{k^n}$, pertencentes a I, cujos denominadores são potências de k com expoente $n \in \mathbb{N}$, é denso em I.

Exercício 8. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, vale $\overline{X} = X \bigcup \operatorname{fr} X$. Conclua que X é fechado se, e somente se, $X \supset \operatorname{fr} X$.

Exercício 9 (*). Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que $\mathbb{R}\backslash \operatorname{int} X = \overline{\mathbb{R}\backslash X}$ e $\mathbb{R}\backslash\overline{X} = \operatorname{int}(\mathbb{R}\backslash X)$.

Exercício 10. Se $X \subset \mathbb{R}$ é aberto (respectivamente, fechado) e $X = A \cup B$ é uma cisão, prove que A e B são abertos (respectivamente, fechados).

Exercício 11. Prove que, se $X \subset \mathbb{R}$ tem fronteira vazia, então $X = \varnothing$ ou $X = \mathbb{R}$.
Dica: prove a contra-positiva, suponha $X \neq \varnothing$ e $X \neq \mathbb{R}$ e encontre um ponto de fronteira.

Exercício 12 (*). Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Prove que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê exemplo em que $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Exercício 13. Dada uma sequência (x_n), prove que o fecho do conjunto $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é $\overline{X} = X \cup A$, onde A é o conjunto dos valores de aderência de (x_n).

Exercício 14 (*). Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Conclua que X é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

Exercício 15 (*). Prove que, se todos os pontos do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ são isolados, então pode-se escolher, para cada $x \in X$, um intervalo I_x de centro x tal que $x \neq y \implies I_x \cap I_y = \varnothing$. *(Dica: divida por 2 o raio de cada intervalo que isola os pontos de X).*

Exercício 16 (*)**.** Prove que todo conjunto não-enumerável $X \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação.

Exercício 17 (*)**.** Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, o conjunto X' é fechado.
(Dica: prove que $\mathbb{R} \backslash X'$ é aberto).

Exercício 18 (*)**.** Seja a um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Prove que existe uma sequência crescente ou uma sequência decrescente de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.

Exercício 19. Prove que o conjunto A dos valores de aderência de uma sequência (x_n) é fechado. Se a sequência for limitada, A é compacto, logo existem reais l e L que são, respectivamente, o menor e o maior valor de aderência da sequência limitada (x_n). O número l é denominado o *limite inferior* de (x_n), denotado por $l = \liminf x_n$, e o número L é denominado o *limite superior* de (x_n), denotado por $L = \limsup x_n$.

Exercício 20 (*)**.** Prove que uma reunião finita e uma intersecção arbitrária de conjunto compactos é um conjunto compacto.

Exercício 21 (*)**.** Dê exemplo de uma sequência decrescente de conjuntos fechados não-vazios $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ e uma sequência decrescente de conjuntos limitados não-vazios $L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_n \supset \cdots$ tais que $\bigcap_n F_n = \varnothing$ e $\bigcap_n L_n = \varnothing$.

Exercício 22. Sejam X, Y conjuntos não-vazios, com X compacto e Y fechado. Prove que existem $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.
(Dica: considere uma sequência $(x_n - y_n)_n$ convergindo para $\inf\{|x - y| : x \in X \text{ e } y \in Y\}$).

Exercício 23 (*)**.** Prove que um conjunto compacto cujos pontos são isolados é finito. Dê exemplo de um conjunto fechado ilimitado X e um conjunto limitado não-fechado Y, cujos pontos são todos isolados.

Exercício 24 (*)**.** Prove que, se X é compacto, então os seguintes conjuntos também são compactos:

(a) $S = \{x + y; x, y \in X\}$;

(b) $D = \{x - y; x, y \in X\}$

(c) $P = \{x \cdot y; x, y \in X\}$

(d) $Q = \{x/y; x, y \in X\}$, assumindo que $0 \notin X$.