Lista de exercícios 7
Funções contínuas

(Os exercícios marcados com (*) são os mais pertinentes).

Exercício 1 (*)**.** Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$. Prove que também são contínuas no ponto a as funções $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ definidas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi = \min\{f(x), g(x)\}$.

Exercício 2 (*)**.** Sejam $f, g : X \to X$ contínuas. Prove que, quando X é aberto, o conjunto $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ também é aberto, e quando X é fechado, o conjunto $F = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ também é fechado.

Exercício 3 (*)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que, se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$.

Exercício 4. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

Exercício 5 (*)**.** Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$. Suponha que, em toda vizinhança de a, existem pontos x, y tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$. Prove que $f(a) = g(a)$.

Exercício 6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ descontínua no ponto a. Prove que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: ou se pode achar uma sequência (x_n) de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ e $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou se acha (y_n) com $y_n \in X$, $\lim y_n = a$ e $f(y_n) < f(a) - \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 7 (*)**.** Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita *localmente constante* quando todo ponto de X possui uma vizinhança V tal que f é constante em $V \cap X$. Prove que toda função $f : I \to \mathbb{R}$, localmente constante num intervalo I, é constante.

Exercício 8 (*)**.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona, definida no intervalo I. Se a imagem $f(I)$ é um intervalo, prove que f é contínua.

Exercício 9 (*)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Mostre que, dado $c \in \mathbb{R}$, existe dentre as soluções x da equação $f(x) = c$ uma cujo módulo $|x|$ é mínimo.

Exercício 11. Prove que não existe função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente duas vezes.

Exercício 12 (*)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x + p) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que toda função contínua periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo, isto é, existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 13. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ continua no conjunto compacto X. Prove que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in X, |x - y| \geq \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq k_\varepsilon |x - y|$. (Isto significa que f cumpre a condição de Lipschitz contanto que os pontos x, y não estejam muito próximos.)

Exercício 14. Se toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, prove que o conjunto X é fechado porém não necessariamente compacto.

Exercício 15 (*)**.** Mostre que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, não é uniformemente contínua.

Exercício 16 (*)**.** Dada $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua, defina $\varphi : \overline{X} \to \mathbb{R}$ ponto $\varphi(x) = f(x)$ se $x \in X$ é um ponto isolado e $\varphi(x) = \lim_{y \to x} f(y)$ se $x \in X'$. Prove que φ é uniformemente contínua e $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Exercício 17 (*)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que existem os limites $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Prove que f é uniformemente contínua. Mesma conclusão vale se existem os limites de $f(x) - x$ quando $x \to \pm\infty$.

Exercício 18 (*)**.** Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Prove que $f + g$ é uniformemente contínua. Prove que o mesmo ocorre com o produto $f \cdot g$ quando f e g são ambas limitadas. Prove também que as funções $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ definidas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi = \min\{f(x), g(x)\}$ são igualmente uniformemente contínuas.