Lista de exercícios 8
Derivadas

(Os exercícios marcados com (*) são os mais pertinentes).

Exercício 1 (*)**.** A fim de que $f : X \to \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista uma função $\eta : X \to \mathbb{R}$, contínua em a, tal que $f(x) = f(a) + \eta(x)(x-a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2 (*)**.** Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo $x \in X$. Se f e h são deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$, com $f(a) = h(a)$ e $f'(a) = h'(a)$, prove que g é derivável nesse ponto, com $g'(a) = f'(a)$.

Exercício 3. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $x_n < a < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{x_n-y_n} = f'(a)$. Interprete este fato geometricamente.

Exercício 4. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sequências de pontos $0 < x_n < y_n$, com $\lim x_n = \lim y_n = 0$ sem que exista o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{x_n-y_n}$.

Exercício 5 (*)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável num ponto $a \in \operatorname{int} X$. Demonstre que vale $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$. Dê um exemplo em que este limite existe porém f não é derivável no ponto a.

Exercício 6. Admitindo que $(e^x)' = e^x$ e que $\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$, prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ possui derivada igual a zero no ponto $x = 0$, o mesmo ocorrendo com $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e assim por diante.

Exercício 7 (*)**.** Seja I um intervalo aberto. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se de *classe* C^2 quando é derivável e sua derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Prove que, se $f(I) \subset J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ também é de classe C^2, então a composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

Exercício 8 (*)**.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 com $f(I) = J$ e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Calcule a derivada segunda de $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ e mostre que f^{-1} é de classe C^2.

Exercício 9 (*)**.** Seja I um intervalo com centro 0. Uma função $f : I \to R$ chama-se par quando $f(-x) = f(x)$ e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in I$. Se f é par, suas derivadas de ordem par (quando existem) são funções pares e suas derivadas de ordem ímpar são funções ímpares. Em particular, estas últimas se anulam no ponto 0. Enuncie resultado análogo para f ímpar.

Exercício 10 (*)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0) \cdot x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é k vezes derivável e $f(tx) = t^k \cdot f(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$, prove que $f(x) = [f^{(k)}(0)/k!] \cdot x^k$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 11 (*)**.** Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, o conjunto dos seus pontos críticos é fechado. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que 0 seja limite de uma sequência de pontos críticos de f mas $f'(0) > 0$.

Exercício 12 (*)**.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Um ponto crítico $c \in I$ chama-se *não-degenerado* quando $f''(c) \neq 0$. Prove que todo ponto crítico não-degenerado é um ponto de máximo local ou de mínimo local.

Exercício 13 (*). Se $c \in I$ é um ponto crítico não-degenerado da função derivável $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo aberto, prove que existe $\delta > 0$ tal que c é o único ponto crítico de f no intervalo $(c-\delta, c+\delta)$. Conclua que, se f é de classe C^1, então num conjunto compacto $K \subset I$, onde os pontos críticos de f são todos não-degenerados, só existe um número finito deles.

Exercício 14 (*). Prove diretamente (sem usar o exercício anterior) que, se o ponto crítico c da função $f : I \to \mathbb{R}$ é limite de uma sequência de pontos críticos $c_n \neq c$ e $f''(c)$ existe, então $f''(c) = 0$.

Exercício 15. Prove que o conjunto dos pontos de máximo ou de mínimo local estrito de qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é enumerável.

Exercício 16. Seja $g : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo aberto I, exceto no ponto $c \in I$. Se existem os limites laterais $\lim_{x\to c^-} g(x) = A$ e $\lim_{x\to c^+} g(x) = B$, com $A \neq B$, então nenhuma função derivável $f : I \to \mathbb{R}$ tem derivada $f' = g$.

Exercício 17 (*). Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$. Admitindo que $\log'(x) = 1/x$, indique os intervalos de crescimento e decrescimento de f, seus pontos críticos e seus limites quando $x \to 0$ e quando $x \to +\infty$.

Exercício 18 (*). Faça um trabalho análogo ao do exercício anterior para a função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{e^x}{x}$, admitindo que $(e^x)' = e^x$.

Exercício 19 (*). Supondo conhecidas as regras de derivação para as funções seno e cosseno, prove que $\operatorname{sen} : (-\pi/2, \pi/2) \to (-1,1)$, $\cos : (0,\pi) \to (-1,1)$ e $\operatorname{tg} : \frac{\operatorname{sen}}{\cos} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ são bijeções com derivadas $\neq 0$ em todos os pontos e calcule as derivadas das funções inversas $\arcsin : (-1,1) \to (-\pi/2, \pi/2)$, $\arccos : (-1,1) \to (0,\pi)$ e $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.

Exercício 20 (*). Dada f derivável no intervalo I, considere os conjuntos $X = \{f'(x) : x \in I\}$ e $Y = \{\frac{f(y)-f(x)}{y-x} : x, y \in \mathbb{R}\}$. O TVM assegura que $Y \subset X$. Dê um exemplo em que se tenha $Y \neq X$. Prove que $\overline{Y} = \overline{X}$ e conclua que $\sup X = \sup Y$ e $\inf X = \inf Y$.

Exercício 21. Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ limitada e derivável. Se existir $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)$, prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = c$.

Exercício 22 (*). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável no intervalo aberto (a,b), com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Se $f'(x) = 0$ apenas num conjunto finito, prove que f é crescente.

Exercício 23 (*). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b), exceto possivelmente num ponto $c \in (a,b)$. Se existir $\lim_{x\to c} f'(x) = L$, prove que $f'(c)$ existe e é igual a L.

Exercício 24 (*). Se $f : I \to \mathbb{R}$ derivável cumpre $|f(y) - f(x)| \leq c|x-y|^\alpha$ com $\alpha > 1$, $c \in \mathbb{R}$ e $x, y \in I$ arbitrários, prove que f é constante.

Exercício 25 (*). Se existem $c, \alpha > 0$ tais que $f : I \to \mathbb{R}$ cumpre $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha$, prove que f é contínua.

Exercício 26 (*). Prove que, se f é derivável num intervalo e f' é contínua no ponto a então, para quaisquer sequências de pontos $x_n \neq y_n$ nesse intervalo, com $\lim x_n = \lim y_n = a$, tem-se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(a)$.