Lista de exercícios 9
Fórmula de Taylor, aplicações da derivada, convexidade

(Os exercícios marcados com (*) são os mais pertinentes).

Exercício 1 (*)**.** Use a igualdade $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ e a fórmula de Taylor para calcular as derivadas sucessivas, no ponto $x = 0$, da função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Exercício 2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ no intervalo I. Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que, para $x_0, x \in I$ quaisquer, vale $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Exercício 3. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 no intervalo I. Dado $a \in I$, defina $\phi : I \to \mathbb{R}$ por $\phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se $x \neq a$ e $\phi(a) = f'(a)$. Prove que ϕ é de classe C^1. Mostre que $f \in C^3 \implies \phi \in C^2$.

Exercício 4 (*)**.** Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau n. Prove que, para $a; x \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Exercício 5. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in \operatorname{int} I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in I$, prove que $f''(a) \geq g''(a)$.

Exercício 6 (*)**.** Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ funções convexas, com $f(I) \subset J$ e g monótona não-decrescente. Prove que $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ é convexa. Dê outra demonstração supondo f e g duas vezes deriváveis. Por meio de um exemplo mostre que, se g não é monótona não-decrescente, o resultado pode não ser válido.

Exercício 7 (*)**.** Se $f : I \to \mathbb{R}$ possui um ponto crítico não degenerado $c \in \operatorname{int} I$ no qual f'' é contínua, prove que existe $\delta > 0$ tal que f é convexa ou côncava no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.

Exercício 8 (*)**.** Examine a convexidade da soma e do produto de duas funções convexas.

Exercício 9 (*)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Suponha que, para todo $x \in I$, a sequência de números $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convirja. Prove que a função $f : I \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, é convexa. Enuncie e demonstre um resultado análogo para funções côncavas.

Exercício 10. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Mostre que existe um único ponto $c \in (a, b)$ com $f(c) = 0$.