# Corrigé CC n°2

## Exercice 1

1) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$

On a $(0,1) \in F$, $(1,0) \in F$ mais

$(0,1) + (1,0) = (1,1) \notin F$.

Donc $F$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

2) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0 \text{ et } x - 5z = 0\}$.

F est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 5z = 0 \end{cases}.$$

C'est donc un sev de $\mathbb{R}^3$.

3) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - z = 1\}$.

On a $(0,0,0) \notin F$. Donc $F$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$.

4) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$

On a $(1,1) \in F$ mais $(-1)(1,1) = (-1,-1) \notin F$.

Donc $F$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

$H = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = 0 \}$

$A = \{ (0,1,1) , (1,1,4) \}$

1) * Soit $(x,y,z) \in Vect(A)$.

On écrit $(x,y,z) = \alpha (0,1,1) + \beta (1,1,4)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On a $\begin{cases} x = \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 4\beta \end{cases}$.

D'où $3x + y - z = 3\beta + (\alpha + \beta) - (\alpha + 4\beta) = 0$.

Donc $(x,y,z) \in H$.

On en déduit $Vect(A) \subset H$.

* Soit $(x,y,z) \in H$. On a $3x + y - z = 0$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$(x,y,z) = \alpha (0,1,1) + \beta (1,1,4)$

$\iff \begin{cases} \beta = x \\ \alpha + \beta = y \\ \alpha + 4\beta = z \end{cases}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = y \\ \beta = x \\ \alpha + 4\beta = z \end{cases}$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = y \\ \beta = x \\ 3\beta = z - y \end{cases}$ $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta = y \\ \beta = x \\ 0 = z-y-3x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta = y \\ \beta = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = x \\ \alpha = y-x \end{cases}$$

Le système est compatible. Donc $H \subset \text{Vect}(A)$.

2) Les vecteurs $(0,1,1)$ et $(1,1,4)$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre.

On en déduit $\dim H = 2$.

3) Prenons $u = (1,0,0)$ et $F = \text{Vect}(u)$.

On a $u \notin H$.

Soit $v \in F \cap H$.

Comme $v \in F$, on écrit $v = \alpha u$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha \neq 0$ alors $u = \alpha^{-1} v \in H$, ce qui est exclu.

Donc $\alpha = 0$, puis $v = 0$.

On a montré que $F \cap H = \{0\}$.

Notons $G = F \oplus H$.

On a $\dim G = \underbrace{\dim F}_{1} + \underbrace{\dim H}_{2} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Donc $G = \mathbb{R}^3$, ce qui montre que $F$ est un supplémentaire de $H$.

Exercice 3

$a_1 = (1,0,2)$, $a_2 = (2,1,0)$, $a_3 = (0,1,2)$

1) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

La famille $(a_1, a_2, a_3)$ est libre.

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) $u = (3,6,6)$

Soient $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}$.

$u = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \\ \beta_2 + \beta_3 = 6 \\ 2\beta_1 + 2\beta_3 = 6 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \\ \beta_2 + \beta_3 = 6 \\ -4\beta_2 + 2\beta_3 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \\ \beta_2 + \beta_3 = 6 \\ 6\beta_3 = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_3 = 4 \\ \beta_2 = 2 \\ \beta_1 = -1 \end{cases}$$

Les coordonnées de $u$ dans la base $(a_1, a_2, a_3)$ sont $(-1, 2, 4)$.