# Feuille 2 - Matrices

**Exercice 1** *1) Soit $A$ une matrice de taille $(m,n)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $B$ une matrice de taille $(p,q)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Quand le produit de $A$ et $B$ est bien défini, écrire le coefficient générique de la matrice $AB$.*
*2) Soit $A,B,C$ trois matrices réelles carrés de taille $n$ telles que $B \neq C$. A-t-on $AB = AC \Rightarrow B = C$ ?*

**Exercice 2** *Dans les cas suivants, calculer $AB$ et $BA$ si cela est possible.*
*a)*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*b)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3** *Calculer le produit $ABC$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4** *Soit $A$, $B$ deux matrices carrés t.q. $AB = A + B$. Montrer que $A$ et $B$ commutent i.e. $AB = BA$ (Indication : introduire $(I_n - A)(I_n - B)$).*

**Exercice 5** *1) Existe-t-il deux matrices $A, B$ carrés telles que $AB - BA = 2022^{2022} \times I_n$ où $I_n$ désigne la matrice identité.*
*2) Si $A$ et $B$ sont deux matrices de taille 2, est-ce que $AB = 0$ implique $BA = 0$ ?*

**Exercice 6** *On considère les matrices à coefficients réels*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

*Calculer (si cela a un sens) les produits $AB$, $BA$, $AC$, $CA$, $BC$, $CB$, $B^2$. En déduire que $A$ et $C$ sont inversibles et préciser leur inverse.*

**Exercice 7** *Inverser la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 8** *Calculer $ABC$ lorsque :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 9** *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*1) Trouver $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2I + B$.*
*2) Calculer $B^2$ et $B^3$.*
*3) En déduire $A^n$ pour tout $n \in I\!N$.*

**Exercice 10** *Calculer le rang de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11** *Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et*

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

*Calculer $A_\theta A_{\theta'}$ puis $A_\theta^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.*

**Exercice 12** *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Calculer $A^2$ et en déduire $A^{-1}$.*

**Exercice 13** *Soit $m$ un réel. Calculer l'inverse des matrices suivantes lorsque c'est possible :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & m+1 & m-2 \\ 2 & 2m+1 & 2m-4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 14** *1) Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$ pour toutes matrices carrées $A, B$, de taille $(n, n)$.*
*2) Calculer $Tr(AA^T)$ où $A$ est une matrice carré de taille $n$. Que dire d'une matrice $A$ à coefficients réels qui vérifie $Tr(AA^T) = 0$ ?*
*3) Si A, B, C, D sont 4 matrices de taille n, alors $ABCD$ a la même trace que $DCBA$ ou $BADC$ ou $BADC$ ou $ACBD$ ou $BCDA$ ?*

**Exercice 15** *On considère les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ données par*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*1) Calculer $P^{-1}$.*
*2) Calculer $B = P^{-1}AP$.*
*3) Montrer que pour tout $n \in I\!N$, $A^n = PB^nP^{-1}$. En deduire $A^n$.*

**Exercice 16** *Soit $a, b, \in \mathbb{R}$. Déterminer les matrices $(2, 2)$ qui commutent avec*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 17** *Inverser les matrices suivantes (ci-dessous $x \in \mathbb{R}$) :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

**Exercice 18** *Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque $A$ est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 19** *On considère des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $x$ et $y$ deux vecteurs colonne de taille $(n, 1)$. Soit $A$ une matrice de taille $(n, n)$ Calculer les produits suivants :*
*- produit scalaire de $x$ par $y$ : $x^T y$. A quelle condition $x^T x$ est-il nul ?*
*- produit extérieur de $x$ par $y$ : $xy^T$. Calculer le produit $(xy^T)(xy^T)$ en fonction de la matrice $xy^T$*
*- forme bilinéaire : $x^T Ay$.*

**Exercice 20** *Déterminer l'inverse $M^{-1}$ de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

*Trouver ensuite une matrice $X$ de taille $(3, 3)$ telle que*

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 21** *Calculer les produits de matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 22** *Exercice facultatif (plus difficile). Soit $A$ une matrice réelle carré telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a*

$$|a_{i,i}| > \sum_{1 \leq j \leq n;\ j \neq i} |a_{i,j}|.$$

*Montrer que $A$ est inversible (lemme d'Hadamard lié au théorème de Gerschgorin).*