Université d'Avignon 2019-2020
Algèbre 2 Licence 1 Mathématiques-Informatique

CC1 : 16 mars 2020 : 10h-11h30 (1h ; 1h20 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé. Barême indicatif : 5 points par exercice environ.

Exercice 1. *Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction : En résolvant le système linéaire $Ax = y$, on échelonne la matrice A avec 3 pivots non nuls ce qui montre que A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On considère maintenant les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:*

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(\lambda, 3\lambda, 2\lambda) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ F_2 &= \mathrm{Vect}((0,1,2),(1,-1,-1)) \\ F_3 &= \{(\lambda+1, \lambda-1, 3\lambda-1) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Parmi ces espaces, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (justifier votre réponse en fournissant une preuve ou bien bien un contre-exemple) ?

Correction : un sev F de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x, y \in F$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\lambda x + \mu y \in F$. On a $F_1 = Vect((1,3,2))$ et donc F_1 et F_2 sont des sev (par définition du vect qui est un sev., propriété de cours). F_3 n'est pas un sev car il ne contient pas le vecteur nul par exemple.

Exercice 3. *On considère le système linéaire*

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + y + az &= b \end{cases}$$

Résoudre ce système en fonction des paramètres réels $a, b \in \mathbb{R}$. Lorsque celui-ci est compatible, donner l'ensemble des solutions ainsi que le rang du système.

Correction : le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + az &= b \\ x + ay + z &= b \\ ax + y + z &= 1 \end{cases}$$

et en échelonnant on trouve
$$\begin{cases} x+y+az &= b \\ (a-1)y+(1-a)z &= 0 \\ (1-a)y+(1-a^2)z &= 1-ab \end{cases}$$

ce qui donne la discussion

1er cas : $a=1$. On a deux sous-cas :

(i) $a=1$, $b \neq 1$ alors $\mathcal{S}=\emptyset$

(ii) $a=1$, $b=1$ alors $\mathcal{S}=\{(1-y-z,y,z)\ ;\ y,z\in\mathbb{R}\}$ et le rang du système est 1 ($rang = 3-2$).

2ème cas : $a \neq 1$ alors on tombe sur le système

$$\begin{cases} x+y+az &= b \\ y-z &= 0 \\ (2+a)z &= \frac{1-ab}{1-a} \end{cases}$$

et on a les 3 sous-cas suivants :

(i) si $a=-2$ et $b\neq -1/2$ alors $\mathcal{S}=\emptyset$

(ii) si $a=-2$ et $b=-1/2$ alors $y=z$ et $x+y-2z=-1/2$ ce qui donne $\mathcal{S}=\{(-1/2+z,z,z)\ ;\ z\in\mathbb{R}\}$ et le rang vaut 2.

(iii) si $a\neq -2$ (et $a\neq 1$) on trouve une seule et unique solution (et donc le rang vaut 3) :

$$x = b-\frac{(1+a)(1-ab)}{(1-a)(2+a)} = \frac{1+a-2b}{(a-1)(2+a)},\ y=z=\frac{1-ab}{(1-a)(2+a)}$$

Exercice 4. *Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carré de taille n vérifiant $A^2=I_n$ (où I_n désigne la matrice identité). Montrer par réccurence l'égalité*

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad (I_n+A)^p = 2^{p-1}(I_n+A).$$

On suppose que $A\neq -I_n$. Montrer que la matrice $A-I_n$ n'est pas inversible.

Correction : 1) c'est vrai pour $p=1$. Si on suppose le résultat vrai au rang $p\geq 1$, alors $(I_n+A)^{p+1} = (I_n+A)^p(I_n+A) = 2^{p-1}(I_n+A)^2 = 2^{p-1}(I_n+2A+A^2) = 2^p(I_n+A)$ (car I_n commute avec toute matrice). D'où le résultat par réccurence.
2) On a $A^2-I_n=(A-I_n)(A+I_n)=0$. Supposons $A-I_n$ inversible. Il vient $(A-I_n)^{-1}(A-I_n)(A+I_n)=0$ c.a.d. $A+I_n=0$ et $A=-I_n$ ce qui n'est pas possible d'après l'hypothèse. D'où $A-I_n$ est non inversible.