Université d'Avignon — 2022-2023

Algèbre 2 — Licence 1 : MI-MP

CC1 : 13 mars 2023 : 10h-11h (11h20 pour les tiers temps)
On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé.

Exercice 1. [4 points]. *Résoudre le système suivant (et donner son rang) :*

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y+2z+t & =0 \\ 2x-y+z-t & =0 \\ -x+y+z-t & =0 \\ 2x-y+4z-t & =0 \end{array}\right.$$

Exercice 2. [4 points] *Soit la matrice*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) [1 point]. *Calculer le rang de A.*
2) [1 point]. *Que vaut A^2 ?*
3) [2 points]. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^k en fonction de A et de k (justifier l'expression obtenue).*

Exercice 3. [5 points] *Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que AB-BA=A. On note* Tr *l'opérateur trace.*
1) [2 point]. *Que vaut $\mathrm{Tr}(A)$? (justifier).*
2) [2 points] *Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a $\mathrm{Tr}(A^k)=0$.*
3) [1 point]. *On suppose maintenant que $AB-BA=A^2$. Que vaut $\mathrm{Tr}(A^k)=0$ pour $k \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$?*

Exercice 4. [5 points] *Soit I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et soit*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) [1 point]. *Montrer que $(A+I_3)^3=A^3+3A^2+3A+I_3$.*
2) [2 points]. *Que vaut $(A+I_3)^3$?*
2) [2 points]. *En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_3, A, et A^2.*

Exercice 5 (4 points)**.** *Soit $m \in \mathbb{R}$ et le système linéaire*

$$\left\{\begin{array}{ll} x+my+mz & =1 \\ mx+y+mz & =1 \\ mx+my+z & =m^2 \end{array}\right.$$

1) [2 points] *Résoudre le système pour $m=1$ et donner son rang.*
2) [2 points] *On suppose $m \neq 1$. Lorsque c'est possible, résoudre le système et indiquer son rang.*